МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ. Т. 2.

Кудрявцев Л. Д.

В учебнике излагаются основные сведения из математического тали за. Рассматриваются как классические вопросы, так и более новые, подготавливающие учащегося к чтению современной математической литературы.

Во втором томе содержится интегральное и дифференциальное исчисление функций многих переменных, теория рядов Фурье и преобразования Фурье, элементы функционального анализа и теория обобщенных функций.

Учебник предназначен для студентов физических и инженерно-физических специальностей высших учебных заведений.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Глава седьмая

Ряды Фурье. Интеграл Фурье

АЛФАВИТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

ГЛАВА ПЯТАЯ

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИЙ МНОГИХ ПЕРЕМЕННЫХ (ПРОДОЛЖЕНИЕ)

39. ФОРМУЛА ТЕЙЛОРА И РЯД ТЕЙЛОРА ДЛЯ ФУНКЦИЙ МНОГИХ ПЕРЕМЕННЫХ

39.1. Формула Тейлора для функций многих переменных

Если функция многих переменных имеет достаточное число непрерывных производных в окрестности некоторой точки, то эту функцию в указанной окрестности оказывается возможным (подобно тому как это было сделано для функций одного переменного) представить в виде суммы некоторого многочлена и остатка, который «мал» в том или ином смысле.

Теорема 1. *Пусть функция $z=f(x,y)$ определена и непрерывна вместе со всеми своими частными производными до порядка m включительно в δ-окрестности точки (x_0,y_0); тогда при Δx и Δy таких, что $\rho=\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}<\delta$, справедлива формула*

$$\Delta z=f(x_0+\Delta x,\ y_0+\Delta y)-f(x_0,\ y_0)=$$

$$=\frac{\partial f(x_0,\ y_0)}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial f(x_0,\ y_0)}{\partial y}\Delta y+$$

$$+\frac{1}{2!}\left[\frac{\partial^2 f(x_0,\ y_0)}{\partial x^2}\Delta x^2+2\frac{\partial^2 f(x_0,\ y_0)}{\partial x\,\partial y}\Delta x\,\Delta y+\frac{\partial^2 f(x_0,\ y_0)}{\partial y^2}\Delta y^2\right]+$$

$$+\frac{1}{3!}\left(\frac{\partial}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial}{\partial y}\Delta y\right)^{\{3\}}f(x_0,\ y_0)+\ \ldots\ +$$

$$+\frac{1}{(m-1)!}\left(\frac{\partial}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial}{\partial y}\Delta y\right)^{\{m-1\}}f(x_0,\ y_0)+r_{m-1}(\Delta x,\ \Delta y),$$

или, короче,

$$\Delta z=\sum_{k=1}^{m-1}\frac{1}{k!}\left(\frac{\partial}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial}{\partial y}\Delta y\right)^{\{k\}}f(x_0,\ y_0)+r_{m-1}(\Delta x,\ \Delta y),\quad (39.1)$$

где

$$r_{m-1}(\Delta x,\ \Delta y)=\frac{1}{m!}\left(\frac{\partial}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial}{\partial y}\Delta y\right)^{\{m\}}f(x_0+\theta\,\Delta x, y_0+\theta\,\Delta y),\quad (39.2)$$

$$0<\theta<1.$$

Формула (39.1) называется *формулой Тейлора* (порядка $m-1$) для функции f, функция $r_{m-1}(\Delta x, \Delta y)$ — ее *остаточным членом*, а его запись в виде (39.2) называется остаточным членом формулы Тейлора в *форме Лагранжа*.

Доказательство. Пусть Δx и Δy зафиксированы так, что $\rho = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2} < \delta$; тогда точки вида $(x_0 + t\Delta x,\ y_0 + t\Delta y)$, где $0 \leqslant t \leqslant 1$, лежат на отрезке, соединяющем точки (x_0, y_0) и $(x_0 + \Delta x,\ y_0 + \Delta y)$, и потому все принадлежат δ-окрестности точки (x_0, y_0). Поэтому имеет смысл суперпозиция функций

$$z = f(x, y)$$

и

$$x = x_0 + t\,\Delta x, \quad y = y_0 + t\,\Delta y, \quad 0 \leqslant t \leqslant 1,$$

т. е. сложная функция

$$F(t) = f(x_0 + t\,\Delta x,\ y_0 + t\,\Delta y), \quad 0 \leqslant t \leqslant 1. \tag{39.3}$$

Очевидно, что

$$\Delta z = f(x_0 + \Delta x,\ y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0) = F(1) - F(0). \tag{39.4}$$

Поскольку функция f имеет в δ-окрестности точки (x_0, y_0) m непрерывных частных производных, то, согласно теореме о производных сложной функции (см. п. 20,3), функция F имеет на отрезке $[0, 1]$ m непрерывных производных, и потому для нее справедлива формула Тейлора порядка $m-1$ с остаточным членом в форме Лагранжа:

$$F(t) - F(0) =$$

$$= F'(0)\,t + \frac{F''(0)}{2!}t^2 + \ldots + \frac{F^{(m-1)}(0)}{(m-1)!}t^{m-1} + \frac{F^{(m)}(\theta t)}{m!}t^m, \quad 0 < \theta < 1. \tag{39.5}$$

Выразив производные $F^{(k)}(t)$ через производные функции $f(x, y)$ и положив в формуле (39.5) $t = 1$ (см. (39.4)), получим требуемую формулу Тейлора для функции $f(x, y)$. Действительно, из (39.3) следует, что

$$F'(t) = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt} =$$

$$= \frac{\partial f(x_0 + t\,\Delta x,\ y_0 + t\,\Delta y)}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial f(x_0 + t\,\Delta x,\ y_0 + t\,\Delta y)}{\partial y}\Delta y.$$

Отсюда для $F''(x)$, опуская для краткости обозначения аргументов, получим

$$F''(t) = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}\Delta y\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\Delta x^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}\Delta x\,\Delta y + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\Delta y^2.$$

Вообще по индукции легко получить, что

$$F^{(k)}(t)=\left(\frac{\partial}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial}{\partial y}\Delta y\right)^{\{k\}} f(x_0+t\,\Delta x,\ y_0+t\,\Delta y), \qquad (39.6)$$
$$k=1,\ 2,\ \ldots,\ m.$$

Полагая в формулах (39.6) $t=0$ при $k=1,\ 2,\ \ldots,\ m-1$, получим

$$F'(0)=\frac{\partial f(x_0,\ y_0)}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial f(x_0,\ y_0)}{\partial y}\Delta y,$$

$$F''(0)=\frac{\partial^2 f(x_0,\ y_0)}{\partial x^2}\Delta x^2+2\frac{\partial^2 f(x_0,\ y_0)}{\partial x\,\partial y}\Delta x\,\Delta y+\frac{\partial^2 f(x_0,\ y_0)}{\partial y^2}\Delta y^2,$$

вообще

$$F^{(k)}(0)=\left(\frac{\partial}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial}{\partial y}\Delta y\right)^{\{k\}} f(x_0,\ y_0),\quad k=1,\ 2,\ \ldots,\ m-1. \qquad (39.7)$$

При $k=m$, заменяя t на θt, имеем

$$F^{(m)}(\theta t)=\left(\frac{\partial}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial}{\partial y}\Delta y\right)^{\{k\}} f(x_0+\theta t\,\Delta x,\ y_0+\theta t\,\Delta y). \qquad (39.8)$$

Подставим теперь (39.7) и (39.8) в (39.5) и положим $t=1$; тогда в силу соотношения (39.4) получим

$$\Delta z=F(1)-F(0)=\sum_{k=1}^{m-1}\frac{F^{(k)}(0)}{k!}+\frac{F^{(m)}(\theta)}{m!}=$$
$$=\sum_{k=1}^{m-1}\frac{1}{k!}\left(\frac{\partial}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial}{\partial y}\Delta y\right)^{\{k\}} f(x_0,\ y_0)+$$
$$+\frac{1}{m!}\left(\frac{\partial}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial}{\partial y}\Delta y\right)^{\{m\}} f(x_0+\theta\,\Delta x,\ y_0+\theta\,\Delta y),\quad 0<\theta<1.$$

Теорема доказана.

Следствие. *В предположениях теоремы*

$$\Delta z=\sum_{k=1}^{m}\frac{1}{k!}\left(\frac{\partial}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial}{\partial y}\Delta y\right)^{\{k\}} f(x_0,\ y_0)+r_m(\Delta x,\ \Delta y), \qquad (39.9)$$

где остаточный член $r_m(\Delta x,\ \Delta y)$ *может быть записан в каждом из следующих видов:*

$$r_m(\Delta x,\ \Delta y)=\sum_{k=0}^{m}\varepsilon_k(\Delta x,\ \Delta y)\,\Delta x^k\,\Delta y^{m-k}, \qquad (39.10)$$

где

$$\lim_{\rho\to 0}\varepsilon_k(\Delta x,\ \Delta y)=0,\quad k=0,\ 1,\ \ldots,\ m;$$

или

$$r_m(\Delta x, \Delta y) = \varepsilon(\Delta x, \Delta y)\rho^m, \qquad (39.11)$$

где

$$\lim_{\rho\to 0} \varepsilon(\Delta x, \Delta y) = 0, \text{ т. е. } r_m(\Delta x, \Delta y) = o(\rho^m) \qquad (39.12)$$

(*такая запись остаточного члена формулы Тейлора называется его записью в форме Пеано*).

Доказательство. Положим

$$\varepsilon_k'(\Delta x, \Delta y) = \frac{\partial^m f(x_0 + \theta\Delta x, y_0 + \theta\Delta y)}{\partial x^k \partial y^{m-k}} - \frac{\partial^m f(x_0, y_0)}{\partial x^k \partial y^{m-k}}. \qquad (39.13)$$

В силу непрерывности всех частных производных порядка m

$$\lim_{\rho\to 0} \varepsilon_k'(\Delta x, \Delta y) = 0.$$

Преобразуем остаток $r_{m-1}(\Delta x, \Delta y)$ (см. (39.2)), использовав выражение (39.13), следующим образом:

$$r_{m-1}(\Delta x, \Delta y) = \frac{1}{m!}\sum_{k=0}^{m} C_m^k \frac{\partial^m f(x_0 + \theta\Delta x, y_0 + \theta\Delta y)}{\partial x^k \partial y^{m-k}} \Delta x^k \Delta y^{m-k} =$$

$$= \frac{1}{m!}\sum_{k=0}^{m} C_m^k \frac{\partial^m f(x_0, y_0)}{\partial x^k \partial y^{m-k}} \Delta x^k \Delta y^{m-k} + \frac{1}{m!}\sum_{k=0}^{m} C_m^k \varepsilon_k'(\Delta x, \Delta y)\Delta x^k \Delta y^{m-k} =$$

$$= \frac{1}{m!}\left(\frac{\partial}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial}{\partial y}\Delta y\right)^{\{m\}} f(x_0, y_0) + \sum_{k=0}^{m} \varepsilon_k(\Delta x, \Delta y)\Delta x^k \Delta y^{m-k}, \qquad (39.14)$$

где

$$\varepsilon_k(\Delta x, \Delta y) = \frac{C_m^k}{m!}\varepsilon_k'(\Delta x, \Delta y),$$

и потому

$$\lim_{\rho\to 0} \varepsilon_k(\Delta x, \Delta y) = 0. \qquad (39.15)$$

Подставляя (39.14) в (39.1), получим формулу Тейлора (39.9) с остаточным членом в виде (39.10).

Покажем, что остаточный член (39.10) можно записать в виде (39.11). Для этого положим

$$\varepsilon(\Delta x, \Delta y) = \sum_{k=0}^{m} \varepsilon_k(\Delta x, \Delta y)\left(\frac{\Delta x}{\rho}\right)^k \left(\frac{\Delta y}{\rho}\right)^{m-k}. \qquad (39.16)$$

Тогда

$$r_m(\Delta x, \Delta y) = \sum_{k=0}^{m} \varepsilon_k(\Delta x, \Delta y)\, \Delta x^k \, \Delta y^{m-k} =$$

$$= \rho^m \sum_{k=0}^{m} \varepsilon_k(\Delta x, \Delta y) \left(\frac{\Delta x}{\rho}\right)^k \left(\frac{\Delta y}{\rho}\right)^{m-k} = \varepsilon(\Delta x, \Delta y)\, \rho^m,$$

и так как

$$\left|\frac{\Delta x}{\rho}\right| \leqslant 1 \quad \text{и} \quad \left|\frac{\Delta y}{\rho}\right| \leqslant 1,$$

то из (39.15) следует, что

$$\lim_{\rho \to 0} \varepsilon(\Delta x, \Delta y) = 0.$$

Следствие доказано.

Используя понятие дифференциалов высших порядков, формуле Тейлора можно придать более компактную форму, внешне совершенно идентичную формуле Тейлора для функций одного переменного, записанной также с помощью дифференциалов. В самом деле, так как (см. п. 21.2)

$$d^k f(x, y) = \left(\frac{\partial}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial}{\partial y}\Delta y\right)^{\{k\}} f(x, y), \quad k = 0, 1, 2, \ldots, m,$$

то, полагая для краткости

$$M_0 = (x_0, y_0) \quad \text{и} \quad M = (x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y),$$

формулу (39.9) можно записать в следующем виде:

$$\Delta z = \sum_{k=0}^{m} \frac{1}{k!} d^k f(M_0) + r_m(M). \tag{39.17}$$

Эта форма записи формулы Тейлора наиболее проста и потому удобна для запоминания.

Следует отметить, что предположения, при которых нами доказана формула Тейлора, могут быть несколько ослаблены. Для справедливости формулы Тейлора (39.1) можно лишь потребовать дифференцируемость в δ-окрестности точки (x_0, y_0) всех производных порядка $m-1$. Тогда они, очевидно, будут непрерывными, а все частные производные порядка $m-2$ дифференцируемыми в указанной окрестности и т. д. Таким образом, функция f при данном предположении оказывается $m-1$ раз непрерывно дифференцируемой в окрестности точки (x_0, y_0). Из предположения дифференцируемости частных производных порядка $m-1$ функции f следует также, что их можно дифференцировать по правилу диффе-

ренцирования сложной функции, если их аргументы, как и в (39.3), линейно зависят от t. Поэтому приведенное выше доказательство формулы Тейлора полностью сохраняется и для этого случая.

Формулу Тейлора (39.1) можно доказать и при еще более слабых ограничениях, однако это потребовало бы более тонкого доказательства, и мы не будем на этом останавливаться (для случая одной переменной см. упражнение 1 в § 13).

Формулу (39.1) можно несколько обобщить и в другом смысле: не требовать, чтобы функция f была определена во всех точках некоторой окрестности точки (x_0, y_0), а рассматривать эту формулу лишь при фиксированных Δx и Δy. Именно если функция f определена и имеет дифференцируемые частные производные до порядка $m-1$ включительно в каждой точке отрезка с концами в точках (x_0, y_0) и $(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y)$, то формула (39.1) также остается справедливой вместе с доказательством.

Из всего сказанного следует, что если функция f определена в выпуклой области G (см. п. 18.2) и имеет в G дифференцируемые частные производные порядка $m-1$, то для любых двух точек $(x_0, y_0)\in G$ и $(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y)\in G$ имеет место формула Тейлора (39.1).

Для справедливости же формулы Тейлора (39.9), кроме дифференцируемости производных порядка $m-1$ в окрестности точки (x_0, y_0), достаточно лишь потребовать, чтобы производные порядка m были непрерывны только в точке (x_0, y_0).

Мы не стали всего этого сразу оговаривать для простоты формулировок и доказательств теоремы 1 и ее следствия.

Подчеркнем еще, что в формуле (39.9) $r_m(\Delta x, \Delta y)=o(\rho^m)$ не в смысле предела по любому фиксированному направлению, как может показаться на первый взгляд из приведенного доказательства, а в более сильном смысле, в смысле предела в точке (x_0, y_0) (почему?).

Упражнение 1. Пусть функция $f(x, y)$ определена и непрерывна вместе со своими частными производными до порядка m включительно в некоторой окрестности точки (x_0, y_0). Доказать, что ее *многочлен Тейлора* порядка m, т. е. многочлен

$$P(x, y)=\sum_{k=0}^{m}\frac{1}{k!}\left[(x-x_0)\frac{\partial}{\partial x}+(y-y_0)\frac{\partial}{\partial y}\right]^{\{k\}} f(x_0, y_0),$$

является многочленом наилучшего приближения функции $f(x, y)$ «в бесконечно малой окрестности точки (x_0, y_0)». Это означает следующее: каков бы ни был многочлен $Q(x, y)$ степени не больше m (в каждом его члене сумма показателей степени у переменных x и y должна не превышать числа m) такой, что

$$f(x, y)=Q(x, y)+o(\rho^n), \quad n\geqslant m,$$

где

$$\rho=\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2},$$

он совпадает с указанным многочленом Тейлора $P(x, y)$ функции $f(x, y)$.

Все сказанное переносится и на случай функций любого числа переменных.

Теорема 1'. *Если функция n переменных $y = f(x_1, \ldots, x_n)$ определена и непрерывна вместе со всеми своими частными производными до порядка m включительно в некоторой окрестности точки $x^{(0)} = (x_i^{(0)})$**), *то справедлива формула*

$$\Delta y = f\left(x_1^{(0)} + \Delta x_1, \ldots, x_n^{(0)} + \Delta x_n\right) - f\left(x_1^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)}\right) =$$
$$= \sum_{k=1}^{m-1} \frac{1}{k!}\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\Delta x_1 + \ldots + \frac{\partial}{\partial x_n}\Delta x_n\right)^{\{k\}} f(x^{(0)}) + r_{m-1}(\Delta x), \quad (39.18)$$

где

$$r_{m-1}(\Delta x) =$$
$$= \frac{1}{m!}\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\Delta x_1 + \ldots + \frac{\partial}{\partial x_n}\Delta x_n\right)^{\{m\}} f\left(x_1^{(0)} + \theta\Delta x_1, \ldots, x_n^{(0)} + \theta\Delta x_n\right),$$
$$0 < \theta < 1, \quad \Delta x = (\Delta x_1, \ldots, \Delta x_n), \quad (39.19)$$

а также формула

$$\Delta y = \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{k!}\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\Delta x_1 + \ldots + \frac{\partial}{\partial x_n}\Delta x_n\right)^{\{k\}} f(x^{(0)}) + r_m(\Delta x), \quad (39.20)$$

где $r_m(\Delta x)$ можно записать в каждом из следующих видов: либо

$$r_m(\Delta x) = \sum_{m_1 + \ldots + m_n = m} \varepsilon_{m_1 \ldots m_n}(\Delta x)\, \Delta x_1^{m_1} \ldots \Delta x_n^{m_n}, \quad (39.21)$$

где

$$\lim_{\rho \to 0} \varepsilon_{m_1, \ldots, m_n}(\Delta x) = 0, \quad \rho = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \Delta x_i^2},$$

либо

$$r_m(\Delta x) = \varepsilon(\Delta x)\rho^m, \quad \lim_{\rho \to 0} \varepsilon(\Delta x) = 0, \quad (39.22)$$

т. е.

$$r_m(\Delta x) = o(\rho^m), \quad \rho \to 0.$$

Наконец, через дифференциалы формулу (39.20) *можно записать в виде*

$$\Delta y = \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{k!} d^k f(x^{(0)}) + r_m(\Delta x). \quad (39.23)$$

---

*) Эти ограничения можно несколько ослабить аналогично тому, как это было указано выше в случае функций двух переменных.

Раскроем теперь скобки в формулах (39.18) и (39.19), воспользовавшись алгебраической формулой

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)^k = \sum_{k_1+\ldots+k_n=k} \frac{k!}{k_1!\,k_2!\,\ldots\,k_n!} a_1^{k_1} a_2^{k_2} \ldots a_n^{k_n}.$$

Для того чтобы короче записать результат, введем новые обозначения. Положим

$$k = (k_1, \ldots, k_n), \quad |k| = k_1 + \ldots + k_n, \quad k! = k! \ldots k_n!,$$

$$f^{(k)} = \frac{\partial^{|k|} f}{\partial x_1^{k_1} \partial x_2^{k_2} \ldots \partial x_n^{k_n}},$$

$$\left(x - x^{(0)}\right)^k = \left(x_1 - x_1^{(0)}\right)^{k_1} \ldots \left(x_n - x_n^{(0)}\right)^{k_n}.$$

В этих обозначениях формула Тейлора (39.18) с остаточным членом в виде (39.19) перепишется в виде

$$f(x) = \sum_{|k| < m} \frac{f^{(k)}\left(x^{(0)}\right)}{k!} \left(x - x^{(0)}\right)^k +$$

$$+ \sum_{|k| = m} \frac{f^{(k)}\left(x^{(0)} + \theta\left(x - x^{(0)}\right)\right)}{k!} \left(x - x^{(0)}\right)^k.$$

Здесь, как всегда, $x = (x_1, \ldots, x_n)$, $x^{(0)} = \left(x_1^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)}\right)$ и

$$x^{(0)} + \theta\left(x - x^{(0)}\right) = \left(x_1^{(0)} + \theta\left(x_1 - x_1^{(0)}\right), \ \ldots, \ x_n^{(0)} + \theta\left(x_n - x_n^{(0)}\right)\right).$$

В этом виде формула Тейлора для функций любого числа переменных формально выглядит так же, как и для случая функций одного переменного.

39.2. Формула конечных приращений для функций многих переменных

Частный случай формулы Тейлора (39.18) при $m = 1$ обычно называется формулой конечных приращений Лагранжа для функций многих переменных. В силу сделанных в предыдущем пункте замечаний к теореме 1 о предположениях, при которых справедливы формулы (39.1) и (39.18), из теоремы 1′ получаем следующую теорему.

Теорема 2. *Если функция $f(x_1, \ldots, x_n)$ определена и дифференцируема в некоторой выпуклой области $G \subset E^n$, то для каждой пары точек $(x_1, \ldots, x_n)$ и $(x_1 + \Delta x_1, \ldots, x_n + \Delta x_n)$ из G существует такое* θ, $0 < \theta < 1$, *что*

$$f(x_1 + \Delta x_1, \ \ldots, \ x_n + \Delta x_n) - f(x_1, \ \ldots, \ x_n) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f(x_1 + \theta \Delta x_1, \ldots, x_n + \theta \Delta x_n)}{\partial x_i} \Delta x_i,$$

или, короче, полагая

$$x = (x_i), \quad x + \Delta x = (x_i + \Delta x_i)$$

и

$$x + \theta \Delta x = (x_i + \theta \Delta x_i),$$

$$f(x + \Delta x) - f(x) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f(x + \theta \Delta x)}{\partial x_i} \Delta x_i. \qquad (39.24)$$

Формула (39.24), как указывалось, и называется *формулой конечных приращений Лагранжа.*

Эта формула, так же как и вообще формула Тейлора, находит многочисленные и разнообразные применения в различных вопросах математического анализа. В качестве примера применения формулы (39.24) докажем следующее утверждение.

Теорема 3. *Если функция f определена и дифференцируема в выпуклой области G и имеет в G ограниченные частные производные, то она равномерно непрерывна в этой области.*

Доказательство. Если

$$\left| \frac{\partial f(x)}{\partial x_i} \right| \leqslant c, \quad i = 1, 2, \ldots, n, \quad x \in G$$

(c — постоянная), то для любых двух точек $x' = (x_i') \in G$ и $x'' = (x_i'') \in G$ из (39.24) следует, что

$$|f(x'') - f(x')| \leqslant \sum_{i=1}^{n} \left| \frac{\partial f(\xi)}{\partial x_i} \right| |x_i'' - x_i'| \leqslant cn\rho(x', x'')$$

(здесь ξ — некоторая точка отрезка с концами в точках x' и x'').

Поэтому, если задано $\varepsilon > 0$, достаточно взять $\delta = \frac{\varepsilon}{cn}$, чтобы при $\rho(x', x'') < \delta$, $x' \in G$, $x'' \in G$ выполнялось неравенство

$$|f(x'') - f(x')| < \varepsilon, \qquad (39.25)$$

а это и означает равномерную непрерывность функции f в области G. Теорема доказана.

39.3. Замечания об оценке остаточного члена формулы Тейлора во всей области определения функции

Остаточный член в формуле Тейлора, очевидно, зависит не только от приращений аргументов, но и от самой точки, в окрестности которой рассматривается разложение функции и которую мы

в п. 39.1 считали фиксированной. Теперь нас будут интересовать поведение и оценка остаточного члена в зависимости от изменения указанной точки. Чтобы подчеркнуть эту зависимость, мы в этом пункте будем остаточный член порядка m обозначать $r_m(x, \Delta x)$, где $x = (x_i)$ — точка, в окрестности которой раскладывается данная функция по формуле Тейлора. Как и раньше, $\Delta x = (\Delta x_i)$.

В формулах (39.21) и (39.22) будем вместо $\varepsilon_{m_1 \ldots m_n}(\Delta x)$ и $\varepsilon(\Delta x)$ соответственно писать $\varepsilon_{m_1 \ldots m_n}(x, \Delta x)$ и $\varepsilon(x, \Delta x)$.

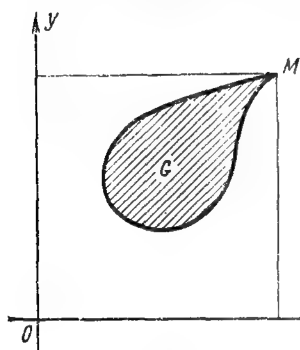


Рис. 117

Нам в дальнейшем потребуется оценка остаточного члена формулы Тейлора в форме Пеано сразу для всей области существования разложения по указанной формуле.

Введем сначала понятие непрерывности частных производных в замыкании открытого множества. Это требует специального определения, так как в граничной точке открытого множества G даже в случае, когда функция определена на замыкании $\overline{G}$, понятие частной производной, вообще говоря, неопределено (см., например, точку M границы области G на рис. 117).

Определение 1. *Функция f, определенная на открытом множестве $G \subset E^n$ называется непрерывно продолжаемой на $\overline{G}$, если существует такая непрерывная на $\overline{G}$ функция F, что $F = f$ на G.*

Функция F называется непрерывным продолжением функции f (на $\overline{G}$) и для простоты будет также обозначаться символом f.

Очевидно, в силу единственности предела функции, если у функции, определенной на G, существует непрерывное продолжение на $\overline{G}$, то оно единственно.

Определение 2. *Функция f называется непрерывно дифференцируемой (соответственно m раз непрерывно дифференцируемой) на $\overline{G}$, если функция f определена на G и все ее частные производные первого порядка (соответственно частные производные до порядка m включительно) непрерывно продолжаемы с G на $\overline{G}$.*

Упражнения. 2. Доказать, что если функция $f(x)$ определена на открытом множестве G и имеет на нем непрерывно продолжаемую на $\overline{G}$ производную f_{x_1}, а в точке $x^{(0)} \in \partial G$ существует частная производная f_{x_1}, то она совпадает с непрерывным продолжением в этой точке частной производной f_{x_1}.

3. Доказать, что, для того чтобы непрерывная функция, определенная на ограниченном открытом множестве $G \subset E^n$, была непрерывно продолжаема на $\overline{G}$, необходимо и достаточно, чтобы она была равномерно непрерывна на G.

Показать, что в случае неограниченного открытого множества условие равномерной непрерывности продолжаемой функции, являясь достаточным для непрерывного продолжения, не является необходимым.

4. Построить пример непрерывной и ограниченной на области функции, которую нельзя непрерывно продолжить на замыкание этой области.

Вернемся теперь к формуле Тейлора. Пусть функция f m раз непрерывно дифференцируема на замыкании $\overline{G}$ открытого ограниченного множества G. Тогда, согласно результатам п. 39.1, в каждой точке G имеет место разложение (39.20) функции f по формуле Тейлора, причем стремление к нулю $\varepsilon_{m_1\ldots m_n}(x, \Delta x)$ в формуле (39.21) и $\varepsilon(x, \Delta x)$ в формуле (39.22) при $\Delta x \to 0$ равномерно на множестве G (см. определение в п. 20.2), т. е. для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, что если

$$\rho = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \Delta x_i^2} < \delta, \tag{39.26}$$

то

$$|\varepsilon_{m_1 \ldots m_n}(x, \Delta x)| < \varepsilon \quad \text{и} \quad |\varepsilon(x, \Delta x)| < \varepsilon$$

для всех точек $x \in G$.

Это в данном случае непосредственно следует из метода получения функций $\varepsilon_{m_1\ldots m_n}(\Delta x)$ и $\varepsilon(\Delta x)$. Действительно, в силу ограниченности и замкнутости замыкания $\overline{G}$ открытого множества G, непрерывные продолжения на G частных производных порядка m данной функции равномерно непрерывны на $\overline{G}$, поэтому (см. формулу (39.13) для случая $n = 2$, в общем случае имеет место аналогичная формула), если выполнено условие (39.26), то

$$|\varepsilon_{m_1 \ldots m_n}(x, \Delta x)| \leqslant \omega\left(\delta; \frac{\partial f}{\partial x_1^{m_1} \ldots \partial x_n^{m_n}}, \overline{G}\right). \tag{39.27}$$

Здесь правая часть (модуль непрерывности соответствующей производной) не зависит от точки множества G и стремится к нулю при $\delta \to 0$. Поэтому из (39.27) следует равномерное стремление $\varepsilon_{m_1\ldots m_n}$ к нулю на G. Далее (см. (39.16) для случая $n = 2$, в случае произвольного n имеет место аналогичная формула),

$$|\varepsilon(x, \Delta x)| \leqslant \sum_{m_1 + \ldots + m_n = m} |\varepsilon_{m_1 \ldots m_n}(x, \Delta x)|. \tag{39.28}$$

В правой части неравенства (39.28) стоит некоторое фиксированное число слагаемых, обозначим его через N. В силу уже доказанного равномерного в G стремлении к нулю функций $\varepsilon_{m_1\ldots m_n}(x, \Delta x)$ для любого заданного $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, что если выполнено условие (39.26), то

$$|\varepsilon_{m_1 \ldots m_n}(x, \Delta x)| < \frac{\varepsilon}{N}, \quad m_1 + \ldots + m_n = m.$$

Отсюда и из неравенства (39.28) следует, что

$$|\varepsilon(x, \Delta x)| < \varepsilon.$$

Утверждение доказано.

Отметим еще одну оценку в целом остаточного члена формулы Тейлора, получающуюся из записи его в форме Лагранжа (39.19).

Если функция f определена на открытом множестве G и имеет на G ограниченные частные производные порядка m, т. е. существует такая постоянная $M > 0$, что

$$\left|\frac{\partial^m f(x)}{\partial x_1^{m_1} \ldots \partial x_n^{m_n}}\right| \leqslant M, \quad m_1 + \ldots + m_n = m, \quad x \in G, \tag{39.29}$$

то при выполнении условия (39.26)

$$|r_{m-1}(x, \Delta x)| \leqslant \frac{Mn^m \delta^m}{m!}$$

для всех $x \in G$. Это сразу следует из формулы (39.19), если абсолютные величины каждого слагаемого ее правой части оценить с помощью неравенства (39.29) и очевидного неравенства $|\Delta x_i| \leqslant \delta$.

39.4. Равномерная сходимость по параметру семейства функций

В предыдущем пункте мы встретились с понятием равномерной сходимости на данном множестве семейства функций, зависящих от некоторого параметра, когда этот параметр стремится к определенным значениям. Такими функциями в нашем случае являлись функции $\varepsilon_{m_1 \ldots m_n}(x, \Delta x)$ и $\varepsilon(x, \Delta x)$, где роль параметра играло Δx. В простейшем виде этот случай встречался еще раньше в п. 20.2.

Сформулируем определение равномерной сходимости семейства функций в общем случае.

Определение 3. *Пусть $X \subset E^n$, $Y \subset E^m$, $y^{(0)}$ — предельная точка множества Y или один из символов ∞, $+\infty$, $-\infty$ (последние два символа имеет смысл рассматривать только при $m = 1$). Пусть, далее, функция $\varphi(x)$ определена для всех $x \in X$, а функция $f(x, y)$ для всех $x \in X$ и $y \in Y$.*

Говорят, что функция $f(x, y)$ равномерно стремится на множестве X к функции $\varphi(x)$ при $y \to y^{(0)}$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такая окрестность $O(y^{(0)})$ точки или символа $y^{(0)}$, что для всех $x \in X$ и всех $y \in Y \cap O(y^{(0)})$ выполняется неравенство

$$|f(x, y) - \varphi(x)| < \varepsilon. \tag{39.30}$$

Переменная y часто называется в этом случае параметром, а функция $f(x, y)$, $y \in Y$ «семейством функций от x» (в том смысле, что

эта функция при различных фиксированных $y \in Y$ задает функции переменной x).

Теорема 4 (критерий Коши). *Для того чтобы функция $f(x, y)$ при $y \to y^{(0)}$ равномерно стремилась на множестве X к некоторой функции, необходимо и достаточно, чтобы для любого $\varepsilon > 0$ нашлась такая окрестность $O(y^{(0)})$ числа или символа $y^{(0)}$, чтобы для любых $y' \in O(y^{(0)}) \cap$ и $y'' \in O(y^{(0)}) \cap$ и любого $x \in X$ выполнялось неравенство*

$$|f(x, y'') - f(x, y')| < \varepsilon. \tag{39.31}$$

Действительно, необходимость условия (39.31), как всегда в подобных ситуациях, легко следует из условия (39.30). Для доказательства же достаточности следует показать, что из условия (39.31) вытекает, что для любого фиксированного $x \in X$ существует $\lim\limits_{y \to y^{(0)}} f(x, y)$ и что стремление функции $f(x, y)$ к этому пределу при $y \to y^{(0)}$ происходит равномерно.

Все это рекомендуется проделать читателю самостоятельно.

Упражнение 5. Доказать: чтобы функция $f(x, y)$, $x \in X$, $y \in Y$ равномерно на множестве X стремилась при $y \to y^{(0)}$ к функции $\varphi(x)$, $x \in X$, необходимо и достаточно, чтобы для любой последовательности $y^{(n)} \in Y$, $n = 1, 2, \ldots$, $\lim\limits_{n \to \infty} y^n = y^{(0)}$, последовательность $f(x, y_n)$, $n = 1, 2 \ldots$, равномерно на множестве X сходилась к функции $\varphi(x)$.

Перейдем к примерам. 1. В случае, когда Y является множеством натуральных чисел $Y = \{1, 2, 3, \ldots\}$, а $y^{(0)} = +\infty$, приведенное определение равномерной сходимости по параметру превращается в определение равномерной сходимости последовательности функций $f_n(x) = f(x, n)$, $n = 1, 2, \ldots$, на множестве X.

2. Пусть функция $f(x, y)$ непрерывна на прямоугольнике

$$Q = \{(x, y): \quad -\infty < a \leqslant x \leqslant b < +\infty, \quad -\infty < c \leqslant y \leqslant d < +\infty\}$$

и пусть $y_0 \in [c, d]$.

Обозначим через $\omega(\delta; f)$ модуль непрерывности функции f в прямоугольнике Q, тогда

$$|f(x, y) - f(x, y_0)| \leqslant \omega(|y - y_0|; f), \quad (x, y) \in Q. \tag{39.32}$$

Правая часть этого неравенства не зависит от x и, в силу равномерной непрерывности функции f на прямоугольнике Q, $\lim\limits_{\delta \to 0} \omega(\delta; f) = 0$. Поэтому из неравенства (39.32) следует, что при $y \to y_0$ функция $f(x, y)$ равномерно на отрезке $[a, b]$ стремится к функции $f(x, y_0)$.

Упражнение 6. Доказать, что если семейство функций $f(x, y)$, $x \in X \subset E^n$, $y \in Y \subset \dot{E}^m$, таково, что при любом фиксированном $y \in Y$ функции $f(x, y)$ непрерывны по x на X и функции $f(x, y)$ равномерно стремятся к функции $\varphi(x)$ при $y \to y^{(0)}$, то функция $\varphi(x)$ также непрерывна на X.

39.5. Замечания о рядах Тейлора для функций многих переменных

Если функция $f(x)$ определена и бесконечное число раз дифференцируема в некоторой δ-окрестности точки $x^{(0)} = (x_i^{(0)}) \in E^n$, то для этой функции формула Тейлора (39.20) будет, очевидно, справедлива, при любом натуральном $m = 1, 2, \ldots$ и $\sum_{i=1}^{n} \Delta x_i^2 < \delta^2$.

Если при этом кратный ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} \left(\frac{\partial}{\partial x_1} \Delta x_1 + \ldots + \frac{\partial}{\partial x_n} \Delta x_n \right)^{\{k\}} f(x^{(0)})$$

будет сходиться к $\Delta y = f(x) - f(x^{(0)})$ (см. п. 38.2), то получится формула

$$\Delta y = f(x) - f(x^{(0)}) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} \left(\frac{\partial}{\partial x_1} \Delta x_1 + \ldots + \frac{\partial}{\partial x_n} \Delta x_n \right)^{\{k\}} f(x^{(0)}),$$

где

$$x = (x_i) \quad \text{и} \quad x_i - x_i^{(0)} = \Delta x_i, \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Отсюда, перенося $f(x^{(0)})$ в правую часть, получим разложение функции в кратный степенной ряд, называемый *рядом Тейлора* функции f:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \left[\left(x_1 - x_1^{(0)}\right) \frac{\partial}{\partial x_1} + \ldots + \left(x_n - x_n^{(0)}\right) \frac{\partial}{\partial x_n} \right]^{\{k\}} f(x^{(0)}),$$

или, что то же,

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} d^k f(x^{(0)}).$$

Упражнение 7. Разложить в ряд Тейлора функцию

$$f(x, y) = e^{x+y}.$$

§ 40. ЭКСТРЕМУМЫ ФУНКЦИЙ МНОГИХ ПЕРЕМЕННЫХ

40.1. Необходимые условия экстремума

Изучаемые в настоящем и некоторых следующих параграфах вопросы носят аналитический характер, и их доказательства по существу не усложняются при увеличении числа переменных, поэтому мы для некоторого разнообразия проведем их рассмотрение сразу в общем n-мерном случае, указывая в случае необходимости их специфические особенности для случая $n = 2$ и $n = 3$.

Определение 1. *Пусть функция $f(x)$ определена на множестве $E \subset E^n$. Точка $x^{(0)} \in E$ называется точкой строгого максимума, соответственно точкой строгого минимума, если существует такая окрестность $O(x^{(0)})$ точки $x^{(0)}$, что выполняется неравенство $f(x) < f(x^{(0)})$ (соответственно $f(x) > f(x^{(0)})$ для всех точек $x \in O(x^{(0)}) \cap E$, $x \neq x^{(0)}$* (рис. 118).

Таким образом, точка строгого максимума (соответственно строгого минимума) характеризуется тем, что $\Delta f = f(x) - f(x^{(0)}) < 0$ (соответственно $\Delta f > 0$) при всех $x \in O(x^{(0)}) \cap E$, $x \neq x^{(0)}$.

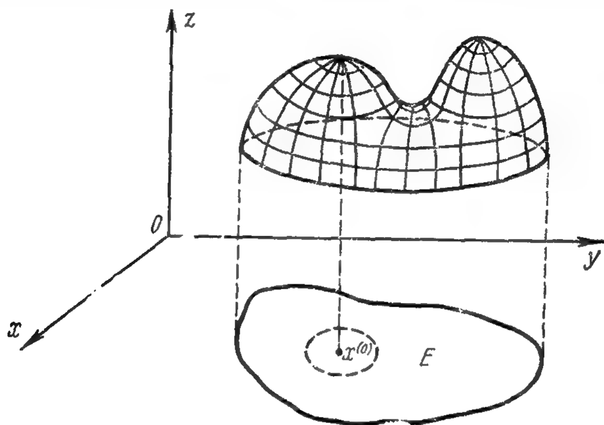


Рис. 118

Если же для точки $x^{(0)}$ существует такая окрестность $O(x^{(0)})$, что для всех точек $x \in O(x^{(0)}) \cap E$ выполняется условие $f(x) \leqslant f(x^{(0)})$ (соответственно $f(x) \geqslant f(x^{(0)})$), то точка $x^{(0)}$ называется просто точкой максимума (соответственно минимума).

Определение 2. *Точки (строгого) максимума и минимума функции называются точками (строгого) экстремума.*

Теорема 1. *Пусть функция $f(x)$, $x = (x_i)$, $i = 1, 2, \ldots, n$, определена в некоторой окрестности точки $x^{(0)}$; если эта точка является точкой экстремума функции $f(x)$ и если в этой точке существует производная $\frac{\partial f}{\partial x_j}$ ($j = 1, 2, \ldots, n$), то она равна нулю:*

$$\frac{\partial f(x^{(0)})}{\partial x_j} = 0.$$

Следствие. *Если функция $f(x)$ дифференцируема в точке экстремума $x^{(0)}$, то ее дифференциал равен нулю в этой точке:*

$$df(x^{(0)}) = 0.$$

Доказательство. Пусть для определенности $j=1$. Если точка $x^{(0)} = \left(x_1^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)}\right)$ является точкой экстремума для функции $f(x) = f(x_1, \ldots, x_n)$, то точка $x_1^{(0)}$ является точкой экстремума для функции $f\left(x_1, x_2^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)}\right)$ одной переменной x_1 (рис. 119), поэтому, если в этой точке существует производная $\frac{\partial f}{\partial x_1}$, то по теореме Ферма (см. п. 11.1) она равна нулю, т. е.

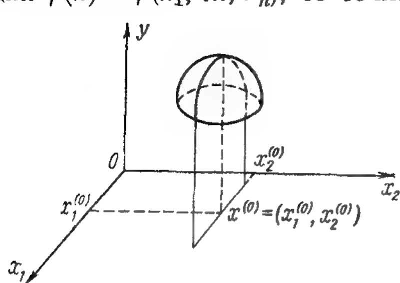


Рис. 119

$$\frac{\partial f\left(x^{(0)}\right)}{\partial x_1} = \left.\frac{df\left(x_1, x_2^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)}\right)}{dx_1}\right|_{x_1 = x_1^{(0)}} = 0.$$

Аналогично обстоит дело в случае любой другой переменной x_j $(j = 2, \ldots, n)$.

Если функция $f(x)$ дифференцируема в точке экстремума $x^{(0)}$, то в этой точке существуют все производные $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ и, согласно доказанному, все они равны нулю, поэтому и

$$df\left(x^{(0)}\right) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f\left(x^{(0)}\right)}{\partial x_i}\, dx_i = 0.$$

Теорема и следствие доказаны.

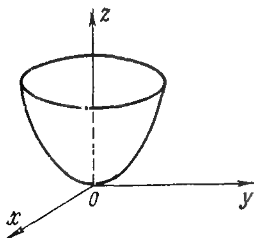


Рис. 120

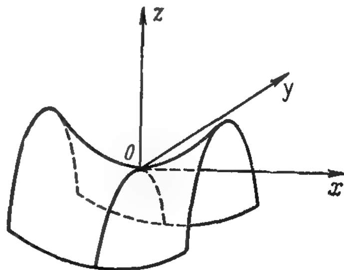


Рис. 121

Рассмотрим примеры. 1. Найдем точки экстремума функции $z = x^2 + y^2$.

Точки экстремума в силу доказанного находятся среди точек, для которых $dz = 0$. Так как $dz = 2x dx + 2y dy$, то условие $dz = 0$ выполняется в единственной точке $(0, 0)$. В этой точке $z = 0$, во

всех же других точках $z = x^2 + y^2 > 0$. Поэтому точка $(0, 0)$ является точкой строгого минимума для функции $z = x^2 + y^2$ (рис. 120).

2. Исследуем точки экстремума функции $z = x^2 - y^2$.

Поступая аналогично предыдущему случаю, находим, что условие $dz = 0$ снова выполняется в точке $(0, 0)$ и в этой точке $z = 0$. Однако здесь при $y = 0$ и любых $x \neq 0$ имеем $z > 0$, а при $x = 0$ и любом $y \neq 0$ имеем $z < 0$. Поэтому точка $(0, 0)$ не является точкой экстремума, и, значит, функция $z = x^2 - y^2$ вообще не имеет экстремальных точек (рис. 121).

40.2. Достаточные условия строгого экстремума

Напомним несколько определений из курса алгебры.

Определение 3. *Квадратичная форма* $A(x) = A(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{i,j=1}^{m} a_{ij} x_i x_j$, $a_{ij} = a_{ji}$, $i, j = 1, 2, \ldots, n$, *называется положительно (соответственно отрицательно) определенной, если* $A(x) > 0$ *(соответственно* $A(x) < 0$) *для любой точки* $x \in E^n$, $x \neq 0$.

Квадратичная форма, являющаяся положительно или отрицательно определенной, называется просто определенной квадратичной формой.

Определение 4. *Квадратичная форма, принимающая как положительные, так и отрицательные значения, называется неопределенной.*

Лемма 1. *Пусть* S — *единичная сфера в* E^n:

$$S = \{x\colon x_1^2 + \ldots + x_n^2 = 1\},$$

и пусть $A(x)$ — *определенная квадратичная форма, тогда*

$$\inf_{x \in S} |A(x)| = \mu > 0.$$

Доказательство. Функция $A(x)$ является многочленом второй степени по переменным $x_1, \ldots, x_n$, поэтому $A(x)$, а значит, и $|A(x)|$ непрерывны на всем пространстве E^n. Отсюда следует, что функция $|A(x)|$ непрерывна на ограниченном замкнутом множестве S. Согласно теореме Вейерштрасса, функция $|A(x)|$ достигает на S своей нижней грани, т. е. существует такая точка $x^{(0)} \in S$, что

$$\mu = \inf_{x \in S} |A(x)| = |A(x^{(0)})|.$$

По определению определенной квадратичной формы $|A(x)| \neq 0$ для всех точек $x \in S$, значит, в частности, $\mu = |A(x^{(0)})| \neq 0$.

Лемма доказана.

Определение 5. *Пусть функция f дифференцируема в точке $x^{(0)} \in E^n$. Если $df(x^{(0)}) = 0$, то точка $x^{(0)}$ называется стационарной точкой функции f.*

Очевидно, что, точка $x^{(0)}$, в которой функция f дифференцируема, является стационарной в том и только в том случае, если

$$\frac{\partial f(x^{(0)})}{\partial x_i} = 0, \quad i = 1, 2, \ldots, n. \tag{40.1}$$

Согласно следствию теоремы 1, точка экстремума, в которой функция f дифференцируема, является стационарной; обратное, конечно, вообще говоря, неверно: не всякая стационарная точка, в которой функция дифференцируема, является точкой экстремума (см. пример 2 в конце п. 40.1).

Теорема 2 (достаточные условия строгого экстремума). *Пусть функция f определена и имеет непрерывные производные второго порядка в некоторой окрестности точки $x^{(0)}$. Пусть $x^{(0)}$ является стационарной точкой функции f, тогда, если квадратичная форма*

$$A(dx_1, \ldots, dx_n) = \sum_{i,\, j=1}^{n} \frac{\partial^2 f(x^{(0)})}{\partial x_i \, \partial x_j} dx_i \, dx_j, \tag{40.2}$$

т. е. второй дифференциал функции f в точке $x^{(0)}$, является положительно определенной (отрицательно определенной) квадратичной формой, то точка $x^{(0)}$ является точкой строгого минимума (соответственно точкой строгого максимума); если же квадратичная форма (40.2) является неопределенной, то в точке $x^{(0)}$ нет экстремума.

Доказательство. Пусть $O(x^{(0)}, \delta_0)$ — окрестность стационарной для функции f точки $x^{(0)}$, в которой функция f имеет непрерывные вторые производные. Пусть точка

$$x^{(0)} + dx = \left(x_1^{(0)} + dx_1, \ldots, x_n^{(0)} + dx_n\right)$$

принадлежит этой окрестности.

По формуле Тейлора (см. 39.23), учитывая условия стационарности (40.1), получим

$$\Delta f = f(x^{(0)} + dx) - f(x^{(0)}) = \frac{1}{2} \sum_{i,\, j=1}^{n} \frac{\partial^2 f(x^{(0)})}{\partial x_i \, \partial x_j} dx_i \, dx_j + \varepsilon(dx) \rho^2,$$

где $dx = (dx_1, \ldots, dx_n)$, $r^2 = dx_1^2 + \ldots + dx_n^2$, и

$$\lim_{r \to 0} \varepsilon(dx) = 0, \tag{40.3}$$

или

$$\Delta f = \frac{\rho^2}{2}\left[\sum_{i,\ j=1}^{n} \frac{\partial^2 f(x^{(0)})}{\partial x_i\, \partial x_j} \frac{dx_i}{\rho} \frac{dx_j}{\rho} + 2\varepsilon(dx)\right] =$$

$$= \frac{\rho^2}{2}\left[A\left(\frac{dx_1}{\rho}, \ldots, \frac{dx_n}{\rho}\right) + 2\varepsilon(dx)\right]. \qquad (40.4)$$

Точка $\left(\frac{dx_1}{\rho}, \ldots, \frac{dx_n}{\rho}\right)$ лежит на единичной сфере S пространства E^n, ибо

$$\left(\frac{dx_1}{\rho}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{dx_n}{\rho}\right)^2 = 1.$$

Пусть квадратичная форма (40.2) является определенной квадратичной формой, тогда, согласно лемме, $\inf_S |A| = \mu > 0$. Выберем $\delta > 0$ так, чтобы $2|\varepsilon(\rho)| < \mu$ при $\rho < \delta$. Тогда при $\rho < \delta$, т. е. при $x^{(0)} + dx \in O(x^{(0)}, \delta)$, и $dx \neq 0$, все выражение в квадратных скобках правой части формулы (40.4) будет иметь тот же знак, что и первое слагаемое $A\left(\frac{dx_1}{\rho}, \ldots, \frac{dx_n}{\rho}\right)$. Поэтому, если квадратичная форма (40.2) является положительно определенной, то $\Delta f > 0$, а если отрицательно определенной, то $\Delta f < 0$ при $x^{(0)} + dx \in O(x^{(0)}, \delta)$. Значит, в первом случае точка $x^{(0)}$ является точкой строгого минимума, а во втором — точкой строгого максимума.

Пусть теперь квадратичная форма (40.2) является неопределенной квадратичной формой; это означает, что существуют две такие точки (dx_i') и (dx_i''), что $A(dx_1', \ldots, dx_n') > 0$, а $A(dx_1'', \ldots, dx_n'') < 0$. Мы не можем на основании этого сразу сказать, что приращение функции Δf меняет знак в любой окрестности точки $x^{(0)}$, так как точки $(x_i^{(0)} + dx_i')$ и $(x_i^{(0)} + dx_i'')$ могут, вообще говоря, даже и не принадлежать области определения функции f.

Рассмотрим точку (dx_i'). Проведем полупрямую, начинающуюся в точке $x^{(0)} = (x_i^{(0)})$ и проходящую через точку $(x_i^{(0)} + dx_i')$. Ее уравнение имеет вид

$$x_i = x_i^{(0)} + t\,dx_i', \quad 0 < t < +\infty. \qquad (40.5)$$

Положим $dx_i = x_i - x_i^{(0)}$, тогда $dx_i = t\,dx_i'$, $i = 1, 2, \ldots, n$.

Если $r = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} dx_i^2}$, $r' = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} dx_i'^2}$, то $r = tr'$,

поэтому

$$\frac{dx_i}{r} = \frac{dx_i'}{r'}, \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Иначе говоря, какую бы точку $x=(x_i^{(0)}+dx_i)$ на полупрямой (40.5) ни взять (рис. 122), точка

$$\left(\frac{dx_1}{r}, \ldots, \frac{dx_n}{r}\right), \tag{40.6}$$

лежащая, очевидно, на единичной сфере S, будет одна и та же, т. е. она не зависит от расстояния ρ точки x от точки $x^{(0)}$. Поэтому и значение квадратичной формы (40.2) в точке (40.6), т. е. $A\left(\frac{dx_1}{r}, \ldots, \frac{dx_n}{r}\right)$, не зависит от ρ. Отсюда для любой точки (40.6) имеем

$$A\left(\frac{dx_1}{r}, \ldots, \frac{dx_n}{r}\right)=A\left(\frac{dx_1'}{r'}, \ldots, \frac{dx_n'}{r'}\right)=\frac{1}{r'^2}A(dx_1', \ldots, dx_n')>0.$$

Пусть $A\left(\frac{dx_1}{\rho}, \ldots, \frac{dx_n}{\rho}\right)=\mu'>0$. Выберем $\rho_0>0$ так, чтобы при $r<r_0$ имело место $2|\varepsilon(dx)|<\mu'$, что возможно в силу (40.3). Тогда для любой точки $(x_i^{(0)}+dx_i)$, лежащей на полупрямой (40.5) и такой, что $r=\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n} dx_i^2}<\rho_0$, в формуле (40.4) выражение в квадратных скобках будет иметь знак первого члена, и потому $\Delta f>0$. Значит, в любой окрестности точки $x^{(0)}$ имеются точки, для которых $\Delta f>0$.

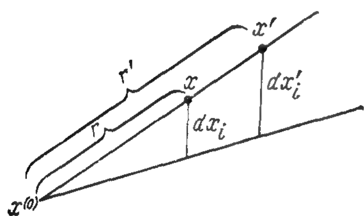


Рис. 122

Аналогично, исходя из отрицательного значения квадратичной формы (40.2) в точке (dx_i''), показывается, что в любой окрестности точки $x^{(0)}$ существуют точки, для которых $\Delta f<0$. А это и означает, что в рассматриваемом случае точка $x^{(0)}$ не является точкой экстремума.

Теорема доказана.

При практическом применении этой теоремы возникает вопрос: а как же установить, будет ли квадратичная форма (40.2) положительно или отрицательно определенной? Для этой цели может служить, например, так называемый к р и т е р и й С и л ь в е с т р а положительной определенности квадратичной формы, доказываемый в курсах алгебры. Он состоит в следующем.

Для того чтобы квадратичная форма

$$A(x)=A(x_1, \ldots, x_n)=\sum_{i,\,j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j, \tag{40.7}$$

у которой $a_{ij}=a_{ji}$, i; $j=1, 2, \ldots, n$, была положительно определенной, необходимо и достаточно, чтобы

$$a_{11}>0, \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}>0, \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}>0, \ldots, \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}>0.$$

Замечая, что квадратичная форма $A(x)$ отрицательно определена тогда и только тогда, когда квадратичная форма $-A(x)=\sum_{i,j=1}^{n}(-a_{ij})x_ix_j$ положительно определена, получаем, пользуясь известными свойствами определителя, следующий критерий отрицательной определенности.

Для того чтобы квадратичная форма (40.7) была отрицательно определенной, необходимо и достаточно, чтобы

$$a_{11}<0, \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}>0, \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}<0, \ldots,$$

$$(-1)^n \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}>0.$$

Сформулируем теперь теорему 2 для случая двух переменных, выразив условия, накладываемые на квадратичную форму (40.2), в явном виде через вторые частные производные.

Теорема 3. *Пусть функция $f(x, y)$ определена и имеет непрерывные частные производные второго порядка в некоторой окрестности точки (x_0, y_0); пусть (x_0, y_0) является стационарной точкой, т. е. в ней*

$$f_x=f_y=0. \tag{40.8}$$

Тогда, если в этой точке

$$f_{xx}f_{yy}-f_{xy}^2>0, \tag{40.9}$$

то она является точкой экстремума, а именно максимума, если в ней

$$f_{xx}<0^{*)},$$

и минимума, если

$$f_{xx}>0.$$

---

*) Очевидно, из условия (40.9) следует, что $f_{xx}\neq 0$ в точке (x_0, y_0).

Если же в точке (x_0, y_0)

$$f_{xx}f_{yy}-f_{xy}^2<0, \tag{40.10}$$

то экстремума в точке (x_0, y_0) *нет.*

Наконец, когда

$$f_{xx}f_{yy}-f_{xy}^2=0 \tag{40.11}$$

в точке (x_0, y_0), *то может случиться, что экстремум в этой точке есть, и может случиться, что экстремума нет.*

Действительно, если $f_{xx} \neq 0$ в точке (x_0, y_0), то квадратичную форму (40.2) в нашем случае можно записать в виде

$$A(dx, dy)=f_{xx}dx^2+2f_{xy}dxdy+f_{yy}dy^2= \\ =\frac{1}{f_{xx}}\left[(f_{xx}dx+f_{xy}dy)^2+(f_{xx}f_{yy}-f_{xy}^2)\,dy^2\right]. \tag{40.12}$$

Все частные производные здесь и ниже взяты в точке (x_0, y_0).

Мы видим, что при выполнении условия (40.9) выражение в квадратных скобках в формуле (40.12) положительно при $dx^2+dy^2>0$, т. е. $A(dx, dy)$ является определенной квадратичной формой, а именно положительно определенной при $f_{xx}>0$ и отрицательно определенной при $f_{xx}<0$. Это, конечно, следует и из вышеприведенного критерия Сильвестра. В первом случае, согласно теореме 2, точка (x_0, y_0) является точкой строгого минимума, а во втором — точкой строгого максимума. Если же выполнено условие (40.10), то при $dy=0$ из (40.12) имеем $\operatorname{sign} A(dx, 0)=\operatorname{sign} f_{xx}$, а при $dx=f_{xy}$, $dy=-f_{xx}$ получим $\operatorname{sign} A(f_{xy}, -f_{xx})=-\operatorname{sign} f_{xx}$, откуда следует, что квадратичная форма $A(dx, dy)$ при выполнении условия (40.10) является неопределенной.

Случай $f_{xx}=0$, $f_{yy}\neq 0$ разбирается аналогично.

Если же $f_{xx}=f_{yy}=0$, но $f_{xy}\neq 0$, т. е. если $A(dx, dy)=2f_{xy}dxdy$, то автоматически выполняется условие (40.10), и сразу видно, что квадратичная форма $A(dx, dy)$ в этом случае является неопределенной, ибо $\operatorname{sign} A(dx, dy)=-\operatorname{sign} A(dx, -dy)$. Поэтому достаточно взять сначала dx и dy одного знака, а затем разных, чтобы получить значения квадратичной формы разных знаков. По теореме 2 точка (x_0, y_0) не является в этом случае точкой экстремума.

Наконец если $f_{xx}=f_{yy}=f_{xy}=0$, то, очевидно, выполняется условие (40.11). Для завершения доказательства теоремы нам достаточно показать на примерах, что, когда имеет место (40.11), экстремум может быть, а может и не быть.

У функции $z=x^2+2xy+y^2$ точка $(0, 0)$ является стационарной, и в ней $z_{xx}=z_{yy}=z_{xy}=2$, и, значит, выполняется условие (40.11). Замечая, что $z=(x+y)^2$, видим, что всюду $z\geqslant 0$; причем $z=0$ на прямой $x+y=0$, поэтому точка $(0, 0)$ является точкой экстремума, правда, не строгого.

Для функции $z = xy^3$ точка (0, 0) также является стационарной, и в ней $z_{xx} = z_{yy} = z_{xy} = 0$, поэтому условие (40.11) также выполняется. Однако в силу того, что в формулу, задающую эту функцию, переменные x и y входят в нечетных степенях, функция меняет знак в любой окрестности нуля, значит, в этом случае точка (0, 0) не является точкой экстремума.

40.3. Замечания об экстремумах на множествах

Пусть функция f дифференцируема на открытом ограниченном множестве G и непрерывна на его замыкании $\overline{G}$. Пусть требуется найти наибольшее и наименьшее значения функции f на множестве $\overline{G}$ (они существуют по теореме 3 п. 19.4). Для этого можно, например, найти все стационарные точки функции f в G, вычислить в них значения функции и выбрать, если, конечно, это возможно (а возможно это, например, заведомо в случае, когда число стационарных точек конечно), точки, в которых функция принимает наибольшее и наименьшее значения из всех значений в стационарных точках. После этого следует сравнить эти значения со значениями, которые принимает функция на границе открытого множества G, например, найдя, если это удается сделать, наибольшее и наименьшее значения функции f на границе G. Сравнив наибольшее и наименьшее значения в стационарных точках множества G с наибольшим и наименьшим значениями на границе G, мы можем, очевидно, найти искомый максимум и минимум f на $\overline{G}$.

В случае, когда G — плоская область и ее граница является кривой, заданной некоторым представлением $x = x(t)$, $y = y(t)$, $\alpha \leqslant t \leqslant \beta$, вопрос о нахождении экстремальных значений функции $f(x, y)$ на границе G сводится к исследованию на экстремум функции одного переменного $f(x(t), y(t))$, что делается уже известными нам методами.

§ 41. НЕЯВНЫЕ ФУНКЦИИ

41.1. Неявные функции, определяемые одним уравнением

Выясним условия, при которых одно уравнение с несколькими переменными определяет однозначную функцию, т. е. определяет одну из этих переменных как функцию остальных. Начнем наше рассмотрение с изучения уравнения, содержащего два неизвестных:

$$F(x, y) = 0. \tag{41.1}$$

Достаточные условия однозначной разрешимости уравнения (41.1) в некоторой окрестности заданной точки x_0, для которой существует y_0 такое, что $F(x_0, y_0) = 0$, даются следующей теоремой.

Теорема 1. *Пусть функция $F(x, y)$ непрерывна в некоторой окрестности точки (x_0, y_0) и имеет в этой окрестности частную производную $F_y(x, y)$, которая непрерывна в точке (x_0, y_0). Тогда, если*

$$F(x_0, y_0)=0, \quad F_y(x_0, y_0) \neq 0,$$

то найдутся такие окрестности O_x и O_y соответственно точек x_0 и y_0, что для каждого $x \in O_x$ существует, и притом единственное,

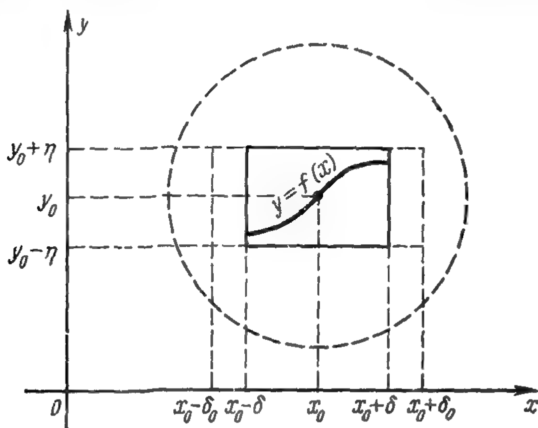


Рис. 123

решение $y \in O_y$ уравнения $F(x, y) = 0$), которое обозначим $y = f(x)$, и это решение $y = f(x)$ непрерывно на O_x.*

Если дополнительно предположить, что функция F имеет непрерывную в точке (x_0, y_0) производную $F_x(x, y)$, то функция $f(x)$ также имеет в точке x_0 производную и

$$f'(x_0) = -\frac{F_x(x_0, y_0)}{F_y(x_0, y_0)}.$$

Заметим, что поскольку для каждого $x \in O_x$ существует единственное решение $y = f(x) \in O_y$ уравнения $F(x, y) = 0$ и поскольку $F(x_0, y_0) = 0$, $x_0 \in O_x$, $y_0 \in O_y$, то $y_0 = f(x_0)$.

Функция $y = f(x)$ называется *неявной функцией*, определяемой уравнением $F(x, y) = 0$ в окрестности точки (x_0, y_0).

*) В этом случае говорят также, что уравнение $F(x, y)=0$ однозначно разрешимо в некоторой окрестности точки (x_0, y_0).

Доказательство. Пусть для определенности $F_y(x_0, y_0) > 0$. Выберем прямоугольную окрестность $O = \{(x, y) : |x - x_0| < \delta_0, |y - y_0| < \eta\}$ таким образом, чтобы функция $F(x, y)$ была непрерывна на замыкании $\bar{O}$ окрестности O и чтобы для всех точек $(x, y) \in \bar{O}$ выполнялось условие $F_y(x, y) > 0$; последнее возможно сделать в силу непрерывности частной производной F_y в точке (x_0, y_0) (см. п. 19.2). В силу условия $F_y > 0$ функция $\varphi(y) = F(x_0, y)$ одного переменного y строго монотонно возрастает на отрезке $[y_0 - \eta, y_0 + \eta]$ (рис. 123), и так как $\varphi(y_0) = F(x_0, y_0) = 0$, то $F(x_0, y_0 - \eta) = \varphi(y_0 - \eta) < 0$, а $F(x_0, y_0 + \eta) = \varphi(y_0 + \eta) > 0$.

В силу непрерывности функции $F(x, y)$ в точках $(x_0, y_0 - \eta)$ и $(x_0, y_0 + \eta)$ функции $F(x, y_0 - \eta)$ и $F(x, y_0 + \eta)$, как функции переменного x, также непрерывны в точке x_0, и потому существует δ-окрестность $O_x = O(x_0, \delta) = (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ точки x_0 такая, что $F(x, y_0 - \eta) < 0$ и $F(x, y_0 + \eta) > 0$ для всех $x \in O_x$. При этом выберем $\delta \leqslant \delta_0$ (это, очевидно, возможно).

Пусть теперь $O_y = O(y_0, \eta) = (y_0 - \eta, y_0 + \eta)$. Зафиксируем $x \in O_x$ и рассмотрим функцию $F(x, y)$ как функцию одного переменного y на отрезке $[y_0 - \eta, y_0 + \eta]$. На этом отрезке существует производная $F_y(x, y) > 0$, поэтому функция $F(x, y)$ как функция y непрерывна и строго монотонно возрастает на отрезке $[y_0 - \eta, y_0 + \eta]$; причем $F(x, y_0 - \eta) < 0$ и $F(x, y_0 + \eta) > 0$.

Следовательно, согласно теореме о промежуточных значениях непрерывной функции, для каждого фиксированного $x \in O_x$ существует точка $y^* \in (y_0 - \eta, y_0 + \eta) = O_y$, такая, что $F(x, y^*) = 0$. В силу строгой монотонности функции $F(x, y)$ на отрезке $[y_0 - \eta, y_0 + \eta]$ указанное y^* единственно. Мы получили, таким образом, некоторое однозначное соответствие (однозначную функцию): $y^* = f(x)$, $x \in O_x$, такую, что $y^* \in O_y$ и $F(x, y^*) = 0$, при этом мы одновременно получили единственность такой функции.

Докажем теперь непрерывность функции f на интервале O_x. Покажем сначала, что функция $y = f(x)$ непрерывна в точке x_0. Пусть задано $\varepsilon > 0$. В данной выше конструкции подчиним выбор $\eta > 0$ дополнительному условию $\eta \leqslant \varepsilon$, тогда, по уже доказанному будем иметь: если $x \in O_x$, т. е. если $|x - x_0| < \delta$, то $y = f(x) \in O_y = (y_0 - \eta, y_0 + \eta) \subset (y_0 - \varepsilon, y_0 + \varepsilon)$, и потому $|y - y_0| < \varepsilon$, что и означает непрерывность функции f в точке x_0.

Для доказательства непрерывности функции $y = f(x)$ в произвольной точке $x \in O_x$ заметим, что, согласно доказанному выше, выполняются следующие условия:

1) $F(x, f(x)) = 0$ и $(x, f(x)) \in O$ для всех $x \in O_x$;

2) $F_y(x, y) > 0$ для всех $(x, y) \in O$.

Из приведенных выше рассуждений видно, что эти два свойства

и позволили осуществить всю изложенную конструкцию; поэтому она полностью может быть проведена и для точки $(x, f(x))$, откуда и следует непрерывность функции f в любой точке $x \in O_x$.

Докажем теперь последнее утверждение теоремы. Пусть в окрестности O существуют непрерывные в точке (x_0, y_0) частные производные F_x и F_y, тогда в точке (x_0, y_0) функция $F(x, y)$ дифференцируема, т. е.

$$F(x_0+\Delta x,\ y_0+\Delta y)-F(x_0,\ y_0)= \\ =F_x(x_0,\ y_0)\,\Delta x+F_y(x_0,\ y_0)\,\Delta y+\varepsilon_1\Delta x+\varepsilon_2\Delta y, \qquad (41.2)$$

где

$$\lim_{\rho\to 0}\varepsilon_1=\lim_{\rho\to 0}\varepsilon_2=0, \quad \rho=\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}.$$

Возьмем в формуле (41.2)

$$x_0+\Delta x\in O_x,\ \Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0),$$

тогда в силу условия $F(x, f(x))=0$ получим

$$F(x_0+\Delta x,\ y_0+\Delta y)=F(x_0+\Delta x,\ f(x_0+\Delta x))=0,$$

и так как $F(x_0, y_0)=0$, то из (41.2) имеем

$$F_x(x_0,\ y_0)\,\Delta x+F_y(x_0,\ y_0)\,\Delta y+\varepsilon_1\Delta x+\varepsilon_2\Delta y=0.$$

Отсюда

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=-\frac{F_x(x_0,\ y_0)+\varepsilon_1}{F_y(x_0,\ y_0)+\varepsilon_2}. \qquad (41.3)$$

Пусть теперь $\Delta x\to 0$, тогда в силу непрерывности функции f и $\Delta y\to 0$, а значит, $\rho=\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}\to 0$ при $\Delta x\to 0$, откуда следует, что в формуле (41.3)

$$\lim_{\Delta x\to 0}\varepsilon_1=\lim_{\Delta x\to 0}\varepsilon_2=0.$$

Поэтому при $\Delta x\to 0$ предел правой части равенства (41.3) существует и равен $-\dfrac{F_x(x_0,\ y_0)}{F_y(x_0,\ y_0)}$ (напомним, что $F_y(x_0, y_0)\neq 0$), поэтому при $\Delta x\to 0$ существует и предел левой части, т. е. существует производная

$$f'(x_0)=-\frac{F_x(x_0,\ y_0)}{F_y(x_0,\ y_0)}. \qquad (41.4)$$

Теорема доказана.

З а м е ч а н и е. Если функции F_x и F_y непрерывны на окрестности O точки (x_0, y_0), то производная f' непрерывна на интервале O_x. Действительно, применяя формулу (41.4) к произвольной точке $x\in O_x$, получим

$$f'(x) = -\frac{F_x(x,\ f(x))}{F_y(x,\ f(x))},$$

откуда по теореме о суперпозиции непрерывных функций мы и получаем непрерывность функции $f'(x)$ на O_x.

Аналогичным образом формулируется и доказывается теорема для неявной функции, определяемой уравнением

$$F(x_1, \ldots, x_n, y) = 0. \qquad (41.5)$$

Чтобы получить соответствующую теорему для этого уравнения, надо в формулировке теоремы 1 под x понимать точку n-мерного пространства $x = (x_1, \ldots, x_n) \in E^n$.

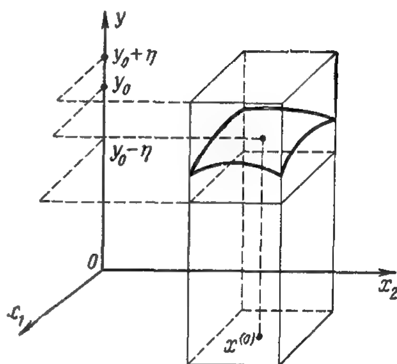


Рис. 124

Теорема 1'. *Пусть функция $F(x, y) \equiv F(x_1, \ldots, x_n, y)$ непрерывна в некоторой окрестности точки $(x^{(0)}, y^{(0)})$ и имеет в этой окрестности частную производную F_y, непрерывную в точке $(x^{(0)}, y^{(0)})$.*

Если $F(x^{(0)}, y^{(0)}) = 0$, а $F_y(x^{(0)}, y^{(0)}) \neq 0$, то найдутся такие окрестности O_x и O_y соответственно точек $x^{(0)}$ и $y^{(0)}$, что для каждого $x \in O_x$ существует, и притом единственное, решение $y \in O_y$ уравнения $F(x, y) = 0$) (это решение обозначим через $y = f(x) = f(x_1, \ldots, x_n)$).*

Если, кроме того, существуют все частные производные F_{x_i}, непрерывные в точке $(x^{(0)}, y^{(0)})$, то существуют и частные производные f_{x_i}, $i = 1, 2, \ldots, n$, причем если частные производные F_{x_i}, $i = 1, 2, \ldots, n$, и F_y непрерывны в окрестности точки $(x^{(0)}, y^{(0)})$, то частные производные f_{x_i} непрерывны в некоторой окрестности точки $x^{(0)}$.

При этом формулы для частных производных неявной функции, определяемой уравнением (41.5), имеют вид

$$\frac{\partial y}{\partial x_i} = -\frac{\dfrac{\partial F}{\partial x_i}}{\dfrac{\partial F}{\partial y}}, \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

---

*) На рис. 124 изображен случай, когда $n = 2$ и окрестность O_x прямоугольная.

41. 2. Произведения множеств

Прежде чем рассмотреть вопрос о разрешимости систем уравнений, введем некоторые новые понятия.

Пусть E_x^p — p-мерное евклидово пространство, точки которого будем обозначать $x = (x_1, \dots, x_p)$, E_y^q — q-мерное евклидово пространство, точки которого будем обозначать $y = (y_1, \dots, y_q)$, а E_{xy}^{p+q} — — $(p+q)$-мерное евклидово пространство точек

$$(x, y) = (x_1, \dots, x_p, y_1, \dots, y_q).$$

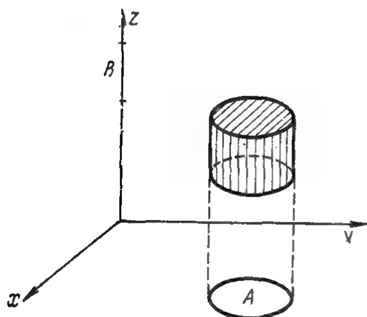


Рис. 125

Определение 1. *Пусть $A \subset E_x^p$ и $B \subset E_y^q$. Множество точек (x, y) пространства E_{xy}^{p+q}, таких, что $x \in A$ и $y \in B$, называется произведением множеств A и B и обозначается $A \times B$. Таким образом,*

$$A \times B = \{(x, y) : x \in A, y \in B\}.$$

Примеры. 1. Если $A = E_x^p$, $B = E_y^q$, то

$$A \times B = E_x^p \times E_y^q = E_{xy}^{p+q}.$$

2. Пусть $p = 2$ и A — круг; $q = 1$ и B — отрезок. Тогда $A \times B$ — прямой круговой цилиндр (рис. 125).

3. Пусть $x^{(0)} = (x_i^{(0)}) \in E_x^p$ и $A = P(x_0;\ \delta_1, \dots, \delta_p) = \{(x_i) : |x_i - x_i^{(0)}| < \delta_i;\ i = 1, 2, \dots, p\}$ — прямоугольная окрестность точки $x^{(0)}$; пусть $y^{(0)} = (y_i^{(0)}) \in E_y^q$ и $B = P(y_0;\ \eta_1, \dots, \eta_q) = \{(y_j) : |y_j - y_j^{(0)}| < \eta_j,\ j = 1, 2, \dots, q\}$ — прямоугольная окрестность точки $y^{(0)}$. Тогда

$$A \times B =$$
$$= \{(x, y) : |x_i - x_i^{(0)}| < \delta_i, i = 1, 2, \dots, p; |y_j - y_j^{(0)}| < \eta_j, j = 1, 2, \dots, q\} =$$
$$= P((x^{(0)}, y^{(0)});\ \delta_1, \dots, \delta_p, \eta_1, \dots, \eta_q) \tag{41.6}$$

является прямоугольной окрестностью точки $(x^{(0)}, y^{(0)})$.

Очевидно и обратно: поскольку всякая прямоугольная окрестность точки (x_0, y_0) записывается формулой, стоящей в середине равенства (41.6), то она всегда может быть представлена как произведение прямоугольных окрестностей точек $x^{(0)}$ и $y^{(0)}$.

Упражнение 1. Доказать, что если множества $A \subset E_x^p$ и $B \subset E_y^q$ являются открытыми множествами соответственно в пространствах E_x^p и E_y^q, то $A \times B$ есть открытое множество в пространстве E_{xy}^{p+q}.

41.3. Неявные функции, определяемые системой уравнений

Рассмотрим условия, при которых система уравнений

$$F_i(x, y)=0, \ i=1, 2, \ldots, p, \ x \in E^q, \ y \in E^p, \tag{41.7}$$

или, подробнее,

$$\begin{aligned} &F_1(x_1, \ldots, x_q, \ y_1, \ldots, y_p)=0, \\ &F_2(x_1, \ldots, x_q, \ y_1, \ldots, y_p)=0, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &F_p(x_1, \ldots, x_q, \ y_1, \ldots, y_p)=0, \end{aligned} \tag{41.8}$$

однозначно разрешима относительно $y_1, \ldots, y_p$ в некоторой окрестности точки $(x^{(0)}, y^{(0)})$, в которой $F_i(x^{(0)}, y^{(0)})=0$, $i=1, 2, \ldots, p$.

Определение 2. *Пусть задана система функций $u_i = u_i(t_1, \ldots, t_n)$, $i = 1, 2, \ldots, m$, имеющих в некоторой точке $t^{(0)}$ все частные производные первого порядка; тогда матрица, составленная из значений частных производных этих функций в точке $t^{(0)}$:*

$$\left\| \begin{matrix} \frac{\partial u_1}{\partial t_1} & \frac{\partial u_1}{\partial t_2} & \ldots & \frac{\partial u_1}{\partial t_n} \\ \frac{\partial u_2}{\partial t_1} & \frac{\partial u_2}{\partial t_2} & \ldots & \frac{\partial u_2}{\partial t_n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \frac{\partial u_m}{\partial t_1} & \frac{\partial u_m}{\partial t_2} & \ldots & \frac{\partial u_m}{\partial t_n} \end{matrix} \right\|,$$

или, короче,

$$\left\| \frac{\partial u_i}{\partial t_j} \right\|, \ i=1, 2, \ldots, m, \ j=1, 2, \ldots, n,$$

называется матрицей Якоби) данной системы функций.*

Если $m=n$, то определитель матрицы Якоби называется *определителем Якоби*, или *якобианом*, системы функций $u_1, \ldots, u_n$ по переменным $t_1, \ldots, t_n$ и обозначается

$$\frac{\partial(u_1, \ldots, u_n)}{\partial(t_1, \ldots t_n)}.$$

Мы увидим в дальнейшем, что якобиан системы функций естественным образом возникает в различных вопросах теории функций многих переменных.

Сформулируем теперь основную теорему этого пункта.

---

*) К. Якоби (1804—1851) — немецкий математик.

Теорема 2. *Пусть функции* $F_i(x, y) = F_i(x_1, \ldots, x_q, y_1, \ldots, y_p)$, $i = 1, 2, \ldots, p$, *непрерывно дифференцируемы в некоторой окрестности точки* $(x^{(0)}, y^{(0)})$, *где* $x^{(0)} = (x_1^{(0)}, \ldots, x_q^{(0)})$, $y^{(0)} = (y_1^{(0)}, \ldots, y_p^{(0)})$. *Тогда, если* $F_i(x^{(0)}, y^{(0)}) = 0$, $i = 1, 2, \ldots, p$, $\frac{\partial(F_1, \ldots, F_p)}{\partial(y_1, \ldots, y_p)} \neq 0$ *в точке* $(x^{(0)}, y^{(0)})$, *то найдутся такие окрестности* O_x *и* O_y *точек* $x^{(0)}$ *и* $y^{(0)}$ *соответственно в пространствах* E_x^q *и* E_y^p, *что для каждого* $x \in O_x$ *существует единственное решение* $y \in O_y$ *системы уравнений* (41.7), *которое обозначим*

$$y = f(x) = \{y_k = f_k(x_1, \ldots, x_q),\ k = 1, 2, \ldots, p\},^{*)}$$

причем функции $f_k(x)$, $k = 1, 2, \ldots, p$, *образующие это решение, непрерывно дифференцируемы на* O_x.

Отметим, что поскольку для каждого $x \in O_x$ существует единственное решение $y = f(x) \in O_y$ системы уравнений (41.7) и поскольку $F_i(x^{(0)}, y^{(0)}) = 0$, $i = 1, 2, \ldots, p$, $x^{(0)} \in O_x$, $y^{(0)} \in O_y$, то $y^{(0)} = f(x^{(0)})$.

Доказательство. Применим метод индукции.

Для случая одного уравнения, т. е. когда $p = 1$, теорема была нами получена в п. 41.1. Пусть теперь теорема 2 верна для $p - 1$ уравнений ($p > 1$). Докажем ее для p уравнений.

Покажем сначала, что каждое из уравнений (41.8) например последнее

$$F_p(x_1, \ldots, x_q, y_1, \ldots, y_p) = 0,$$

можно разрешить в окрестности точки $(x^{(0)}, y^{(0)})$ по крайней мере относительно одного переменного. Действительно, по условию теоремы в точке $(x^{(0)}, y^{(0)})$

$$\frac{\partial(F_1, \ldots, F_p)}{\partial(y_1, \ldots, y_p)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial y_1} & \ldots & \frac{\partial F_1}{\partial y_p} \\ \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \frac{\partial F_p}{\partial y_1} & \ldots & \frac{\partial F_p}{\partial y_p} \end{vmatrix} \neq 0,$$

---

*) Система функции $f_k(x_1, \ldots, x_q)$, $k = 1, 2, \ldots, p$, обозначена одним функциональным символом $f(x)$, так как эта система задает определенное соответствие: точкам некоторого множества пространства E_x^q они ставят в соответствие определенные точки пространства E_y^p, или, как говорят, отображает указанное множество пространства E_x^q в пространство E_y^p.

поэтому в этой точке хотя бы один элемент последней строчки определителя Якоби отличен от нуля; пусть это будет для определенности последний элемент:

$$\frac{\partial F_p\left(x^{(0)},\ y^{(0)}\right)}{\partial y_p} \neq 0.$$

Отсюда в силу теоремы 1' п. 41.1 следует, что уравнение $F_p(x,\ y)=0$ может быть разрешено относительно переменной y_p в некоторой окрестности точки $(x_0,\ y_0)$. Сформулируем это более точно. Обозначим через O окрестность точки $(x^{(0)},\ y^{(0)})$, в которой функции F_i, $i=1,\ 2,\ \ldots,\ p$, непрерывно дифференцируемы. Тогда найдутся прямоугольная окрестность O^{p+q-1} точки $\left(x_1^{(0)},\ \ldots, x_q^{(0)},\ y_1^{(0)},\ \ldots,\ y_{p-1}^{(0)}\right)$ и окрестность O^1 точки $y_p^{(0)}$ такие, что $O^{p+q-1}\times O^1\subset O$, и существует определенная и непрерывно дифференцируемая на O^{p+q-1} функция

$$y_p=\varphi(x_1,\ \ldots,\ x_q,\ y_1,\ \ldots,\ y_{p-1}), \tag{41.9}$$

удовлетворяющая следующим условиям: если

$$(x,\ \tilde{y})=(x_1,\ \ldots,\ x_q,\ \ y_1,\ \ldots,\ y_{p-1})\in O^{p+q-1},$$

то

$$\varphi(x,\ \tilde{y})=\varphi(x_1,\ \ldots,\ x_q,\ y_1,\ \ldots,\ y_{p-1})\in O^1, \tag{41.10}$$

$$F_p(x_1,\ \ldots,\ x_q,\ y_1,\ \ldots,\ y_{p-1},\ \varphi(x,\ \tilde{y}))=0, \tag{41.11}$$

и

$$\varphi\left(x^{(0)},\ \tilde{y}^{(0)}\right)=y_p^{(0)}, \tag{41.12}$$

где

$$\left(x^{(0)},\ \tilde{y}^{(0)}\right)=\left(x_1^{(0)},\ \ldots,\ x_q^{(0)},\ y_1^{(0)},\ \ldots,\ y_{p-1}^{(0)}\right). \tag{41.13}$$

Подставим в первые $p-1$ уравнения системы (41.8) выражение (41.9), тогда, вводя обозначение

$$\begin{gathered}\Phi_i(x_1,\ \ldots,\ x_q,\ y_1,\ \ldots\ y_{p-1})=\\ =F_i(x_1,\ \ldots,\ x_q,\ y_1,\ \ldots,\ y_{p-1},\quad \varphi(x_1,\ \ldots,\ x_q,\ y_1,\ \ldots,\ y_{p-1})),\\ i=1,\ 2,\ \ldots,\ p-1,\end{gathered} \tag{41.14}$$

получим следующую систему $p-1$ уравнений с $p+q-1$ неизвестными:

$$\begin{gathered}\Phi_1(x_1,\ \ldots,\ x_q,\ y_1\ \ldots,\ y_{p-1})=0\\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\\ \Phi_{p-1}(x_1,\ \ldots,\ x_q,\ y_1,\ \ldots,\ y_{p-1})=0.\end{gathered} \tag{41.15}$$

Покажем, что эта система удовлетворяет условиям, которым удовлетворяет система (41.8), если только заменить p на $p-1$. Действительно, функции Φ_k, $k=1, 2, \ldots, p-1$, непрерывно дифференцируемы в окрестности O^{p+q-1} как суперпозиции непрерывно дифференцируемых функций. Из условия $F_i(x^{(0)}, y^{(0)})=0$, $i=1, 2, \ldots, p$, и условий (14.11) и (14.12) следует, что $\Phi_k(x^{(0)}, y^{(0)})=0$, $k=1, 2, \ldots, p-1$.

Докажем, что в точке $(x^{(0)}, \tilde{y}^{(0)})$ [см. (41.13)]

$$\frac{\partial(\Phi_1, \ldots, \Phi_{p-1})}{\partial(y_1, \ldots, y_{p-1})} \neq 0.$$

Для этого предварительно заметим, что из (41.9) и (41.14) следует, что

$$\frac{\partial \Phi_i}{\partial y_k} = \frac{\partial F_i}{\partial y_k} + \frac{\partial F_i}{\partial y_p} \frac{\partial \varphi}{\partial y_k}, \quad i, k = 1, 2, \ldots, p-1, \tag{41.16}$$

а из (41.11), что

$$\frac{\partial F_p}{\partial y_k} + \frac{\partial F_p}{\partial y_p} \frac{\partial \varphi}{\partial y_k} = 0, \quad k = 1, 2, \ldots, p-1. \tag{41.17}$$

Теперь в определителе $\frac{\partial(F_1, \ldots, F_p)}{\partial(y_1, \ldots, y_p)}$ к k-му столбцу прибавим последний столбец, умноженный на $\frac{\partial \varphi}{\partial y_k}$, $k=1, \ldots, p-1$, отчего, как известно, величина определителя не изменяется. Поэтому, используя (41.16) и (41.17) и раскладывая получившийся определитель по последней строчке, получим

$$\left.\frac{\partial(F_1, \ldots, F_p)}{\partial(y_1, \ldots, y_p)}\right|_{(x^{(0)}, y^{(0)})} =$$

$$= \left|\begin{matrix} \frac{\partial F_1}{\partial y_1} + \frac{\partial F_1}{\partial y_p} \frac{\partial \varphi}{\partial y_1} & \ldots & \frac{\partial F_1}{\partial y_{p-1}} + \frac{\partial F_1}{\partial y_p} \frac{\partial \varphi}{\partial y_{p-1}} & \frac{\partial F_1}{\partial y_p} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \frac{\partial F_p}{\partial y_1} + \frac{\partial F_p}{\partial y_p} \frac{\partial \varphi}{\partial y_1} & \ldots & \frac{\partial F_p}{\partial y_{p-1}} + \frac{\partial F_p}{\partial y_p} \frac{\partial \varphi}{\partial y_{p-1}} & \frac{\partial F_p}{\partial y_p} \end{matrix}\right|_{(x^{(0)}, y^{(0)})} =$$

$$= \left|\begin{matrix} \frac{\partial \Phi_1}{\partial y_1} & \ldots & \frac{\partial \Phi_1}{\partial y_{p-1}} & \frac{\partial F_1}{\partial y_p} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \frac{\partial \Phi_{p-1}}{\partial y_1} & \ldots & \frac{\partial \Phi_{p-1}}{\partial y_{p-1}} & \frac{\partial F_p}{\partial y_p} \\ 0 & \ldots & 0 & \frac{\partial F_p}{\partial y_p} \end{matrix}\right|_{(x^{(0)}, y^{(0)})} = \frac{\partial F_p(x^{(0)} y^{(0)})}{\partial y_p} \left.\frac{\partial(\Phi_1, \ldots, \Phi_{p-1})}{\partial(y_1, \ldots, y_{p-1})}\right|_{(x^{(0)}, \tilde{y}^{(0)})},$$

и так как левая часть равенства отлична от нуля, то отлична от нуля и правая, откуда

$$\left.\frac{\partial(\Phi_1, \ldots, \Phi_{p-1})}{\partial(y_1, \ldots, y_{p-1})}\right|_{(x^{(0)}, \tilde{y}^{(0)})} \neq 0,$$

В силу выполнения для функций Φ_i, $i=1, 2, \ldots, p-1$, условий, аналогичных условиям для функций F_i, $i=1, 2, \ldots, p$, и согласно предположению индукции система уравнений (41.15) однозначно разрешима относительно переменных $y_1, \ldots, y_{p-1}$ в некоторой окрестности точки $(x^{(0)}, \tilde{y}^{(0)})$. Точнее, пусть O^{p+q-1} — прямоугольная окрестность точки $(x^{(0)}, \tilde{y}^{(0)})$, полученная при разрешении уравнения $F_p=0$ относительно переменной y_p. Разложим ее в произведение прямоугольных окрестностей O'_x и $O'_{\tilde{y}}$ точек $x^{(0)}=(x_1^{(0)}, \ldots, x_q^{(0)})$ и $\tilde{y}^{(0)}=(y_1^{(0)}, \ldots, y_{p-1}^{(0)})$ соответственно в пространствах E_x^q и $E_{\tilde{y}}^{p-1}$ (здесь $\tilde{y}=(y_1, \ldots, y_{p-1})$): $O^{q+p-1}= O'_x \times O'_{\tilde{y}}$. Тогда существуют окрестность $O_x \subset O'_x$ точки $x^{(0)}$, окрестность $O_{\tilde{y}} \subset O'_{\tilde{y}}$ точки $\tilde{y}^{(0)}$ и система функций

$$\left.\begin{array}{l} y_1 = f_1(x) = f_1(x_1, \ldots, x_q), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_{p-1} = f_{p-1}(x) = f_{p-1}(x_1, \ldots, x_q), \end{array}\right\} \qquad (41.18)$$

определенных и непрерывно дифференцируемых на множестве O_x и удовлетворяющих следующим условиям: если $x \in O_x$, то

$$(f_1(x), \ldots, f_{p-1}(x)) \in O_{\tilde{y}}, \qquad (41.19)$$

и на O_x функции (41.18) удовлетворяют системе уравнений (41.15)

$$\Phi_i(x_1, \ldots, x_q, f_1(x), \ldots, f_{p-1}(x)) = 0, \qquad (41.20)$$
$$i=1, 2, \ldots, p-1.$$

Подставляя выражения (41.18) в (41.9), получим функцию от x, определенную на O_x; обозначим ее f_p:

$$y_p = \varphi(x_1, \ldots, x_q, f_1(x), \ldots, f_{p-1}(x)) = f_p(x_1, \ldots, x_q) = f_p(x). \qquad (41.21)$$

Покажем, что система функций

$$y_k = f_k(x_1, \ldots, x_q), \ k=1, 2, \ldots, p, \qquad (41.22)$$

(см. (41.18) и (41.21)) и является искомой системой функций, удовлетворяющей требованиям, сформулированным в теореме.

В самом деле, пусть $O_y = O_{\tilde{y}} \times O^1$, тогда, если $x \in O_x$, то в силу (41.19) и (41.10) $f(x) = (f_1(x), \ldots, f_p(x)) \in O_y$. Из (41.14), (41.20),

(41.21) и (41.11) следует, что $F_i(x, f(x)) = 0$, $i = 1, 2, \ldots, p$, для всех $x \in O_x$.

Наконец, в силу теоремы о производной сложной функции все функции f_i, $i = 1, 2, \ldots, p$, непрерывно дифференцируемы на O_x.

Остается доказать единственность указанной системы. Пусть функции $f_1^*, \ldots, f_p^*$ также образуют решение системы (41.8), определены на окрестности O_x и отображают ее в окрестность O_y. Покажем, что тогда $f_i = f_i^*$, $i = 1, 2, \ldots, p$, на O_x.

Перепишем равенство (41.11) в виде

$$F_p(x;\ y_1, \ldots, y_{p-1},\ \varphi(x;\ y_1, \ldots, y_{p-1})) = 0,$$
$$(x;\ y_1, \ldots, y_{p-1}) \in O_x \times O_{\tilde{y}},$$

в частности, считая $y_i = f_i^*(x)$, $x \in O_x$, $i = 1, 2, \ldots, p-1$, получим

$$F_p(x;\ f_i^*(x), \ldots, f_{p-1}^*(x),\ \varphi(x;\ f_1^*(x), \ldots, f_{p-1}^*(x))) = 0,\ x \in O_x. \tag{41.23}$$

На O_x выполняется также равенство

$$F_p(x,\ f_1^*(x), \ldots, f_p^*(x)) = 0,\ x \in O_x, \tag{41.24}$$

и так как уравнение

$$F_p(x;\ y_1, \ldots, y_p) = 0$$

имеет единственное решение для каждой фиксированной точки $(x : y_1, \ldots, y_{p-1}) \in O_x \times O_{\tilde{y}}$, то из (41.23) и (41.24) получаем

$$\varphi(x;\ f_1^*(x), \ldots, f_{p-1}^*(x)) = f_i^*(x),\ x \in O_x. \tag{41.25}$$

Далее из (41.14) и (41.25) имеем

$$\Phi_i(x;\ f_1^*(x), \ldots, f_{p-1}^*(x)) =$$
$$= F_i(x;\ f_1^*(x), \ldots, f_{p-1}^*(x),\quad \varphi(x;\ f_1^*(x), \ldots, f_{p-1}^* x)) =$$
$$= F_i(x;\ f_1^*(x), \ldots, f_p^*(x)) = 0,\ x = (x_i) \in O_x,$$

т. е. функции $f_1^*, \ldots, f_{p-1}^*$ являются решением системы (41.15) на O_x; но мы уже имели на O_x решение этой системы $f_1, \ldots, f_{p-1}$. По предположению индукции решение системы (41.15) единственно, поэтому

$$f_i^*(x) = f_i(x),\ i = 1, 2, \ldots, p-1,\ x \in O_x.$$

Отсюда в силу (41.25) и (41.21)

$$f_p^*(x) = \varphi(x;\ f_1(x), \ldots, f_{p-1}(x)) = f_p(x),\ x \in O_x.$$

Единственность решения системы (41.8) доказана.

41.4. Отображения. Свойства якобианов отображений

Пусть задана система функций

$$y_i = f_i(x_1, \ldots, x_n), \; i = 1, 2, \ldots, m, \tag{41.26}$$

определенных на множестве $E \subset E_x^n$. Такая система функций, очевидно, определяет новую функцию, ставящую в соответствие точке $x = (x_1, \ldots, x_n) \in E$ точку $y = (y_1, \ldots, y_m) \in E_y^m$. Эта функция, которую мы обозначим $y = f(x)$, обычно называется *отображением* множества $E \subset E_x^n$ в пространство E_y^m. Напомним (см. п. 4.1), что множество

$$f(E) = \{y : y = f(x), \; x \in E\}$$

называется *образом множества* E при отображении $f(x)$.

Если $D \subset f(E)$, то множество

$$f^{-1}(D) = \{x : f(x) \in D, \; x \in E\}$$

называется *прообразом множества* D.

Если $f(E) \subset D$, то мы будем говорить, что отображение f отображает множество E в *множество* D. Если же $f(E) = D$, то — *на множество* D.

Определение 9. *Отображение* (41.26) *называется непрерывным* (*соответственно дифференцируемым, непрерывно дифференцируемым и т. п.*) *в точке* $x^{(0)} \in E$, *если каждая из функций* (41.26), *задающих это отображение, непрерывна* (*соответственно дифференцируема, непрерывно дифференцируема и т. п.*) *в точке* $x^{(0)}$.

Не прибегая к понятию непрерывности функций, задающих отображение, условие непрерывности отображения в точке $x^{(0)}$ можно перефразировать, например, следующим образом.

Определение 9'. *Отображение* $y = f(x)$ *множества* $E \subset E_x^n$ *в пространство* E_y^m *называется непрерывным в точке* $x^{(0)} \in E$, *если для любой окрестности* $O_y \subset E_y^m$ *точки* $y^{(0)} = f(x^{(0)})$ *существует окрестность* $O_x \subset E_x^n$ *точки* $x^{(0)}$ *такая, что*

$$f(O_x \cap E) \subset O_y. \tag{41.27}$$

Действительно, пусть отображение $f(x) = \{f_i(x), \; i = 1, 2, \ldots, m\}$ непрерывно в точке $x^{(0)}$ в смысле определения 9, пусть $y_i^{(0)} = f_i(x^{(0)})$, $i = 1, 2, \ldots, m$, и пусть задана кубическая окрестность $O_y = P(y^{(0)}; \varepsilon)$ точки $y^{(0)}$ в E^m. В силу непрерывности каждой из функций f_i, $i = 1, 2, \ldots, m$, в точке $x^{(0)}$ существует такое $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, что если $O_x = O(x^{(0)}; \delta)$ — δ-окрестность точки $x^{(0)}$ в E^n, то $|f_i(x) - y_i^{(0)}| < \varepsilon$, $i = 1, 2, \ldots, m$, для всех $x \in O_x \cap E$. Это означает, что $f(x) = (f_1(x), \ldots, f_m(x)) \in O_y$ и так как x — произвольная точка множества $O_x \cap E$, то $f(O_x \cap E) \subset O_y$.

Пусть теперь отображение $f(x)$ непрерывно в смысле определения 9′. Для удобства снова будем брать в качестве окрестности O_y кубическую окрестность $O_y = P(y^{(0)}; \ \varepsilon)$. По условию (41.27) для любой окрестности O_y существует такая окрестность $O_x = O(x^{(0)}; \ \delta)$, что если $x \in O_x \cap E$, то $f(x) = (f_1(x), \ldots, f_m(x)) \in O_y$, т. е. $|f_i(x) - y_i^{(0)}| < \varepsilon$, $i = 1, 2, \ldots, m$, а это и означает непрерывность каждой функции f_i, $i = 1, 2, \ldots, m$, в точке $x^{(0)}$.

Лемма 1. *Отображение f множества $E \subset E_x^n$ в E_y^m непрерывно в точке $x \in E$ тогда и только тогда, когда для любой сходящейся последовательности точек $x^{(k)} \in E$, $k=1, 2, \ldots$, такой, что $\lim\limits_{k\to\infty} x^{(k)} = x \in E$, выполняется условие*

$$\lim_{k\to\infty} f(x^{(k)}) = f(x). \tag{41.28}$$

Доказательство. Условие (41.28) равносильно условию

$$\lim f_i(x^{(k)}) = f_i(x), \ i=1, 2, \ldots, k$$

(см. теорему 1 п. 18.1), которое означает непрерывность функций f_i (см. п. 19.2) в точке x, а следовательно, и отображения f.

Отображение f множества $E \cap E_x^n$ в E_y^m называется *непрерывным*, если оно непрерывно в каждой точке множества E.

Теорема Вейерштрасса об ограниченности непрерывных функций на ограниченных замкнутых множествах легко обобщается и на случай непрерывных отображений.

Лемма 2. *Пусть E — ограниченное замкнутое множество $E \subset E_x^n$, а f — непрерывное отображение E в E_y^m. Тогда $f(E)$ также ограниченное замкнутое множество.*

Доказательство. Если отображение $f(x)$ непрерывно, то, согласно определению 9, задающие его функции (41.26) также непрерывны, и так как E — ограниченное замкнутое множество, то они ограничены на нем (см. теорему в п. 19.4), т. е. существует такая постоянная $M > 0$, что для всех $x \in E$ выполняется неравенство $|f_i(x)| \leqslant M$, $i = 1, 2, \ldots, m$. Следовательно, множество $f(E)$ ограничено.

Покажем теперь, что $f(E)$ замкнуто. Пусть $y \in \overline{f(E)}$, тогда существует такая последовательность точек $y^{(k)} \in f(E)$, $k = 1, 2, \ldots$, что $\lim\limits_{k\to\infty} y^{(k)} = y$. Выберем по точке $x^{(k)}$ из прообразов точек $y^{(k)}$ при отображении f: $x^{(k)} \in f^{-1}(y^{(k)})$, $k = 1, 2, \ldots$. В силу ограниченности множества E по теореме Больцано — Вейерштрасса (см. п. 18.1) из последовательности $\{x^{(k)}\}$ можно выделить сходящуюся подпоследовательность $\{x^{(k_s)}\}$.

Пусть

$$\lim_{s\to\infty} x^{(k_s)} = x.$$

Из замкнутости множества E следует, что $x \in E$. В силу же непрерывности отображения f, согласно лемме 1, имеем

$$\lim_{s\to\infty} y^{(k_s)} = \lim_{s\to\infty} f(x^{(k_s)}) = f(x).$$

Но $\lim\limits_{k\to\infty} y^{(k_s)} = y$, поэтому $y = f(x)$, т. е. $y \in f(E)$. Поскольку y являлась произвольной точкой прикосновения множества $f(E)$, то это и означает, что $f(E)$ — замкнутое множество.

Обобщается на случай отображений и понятие равномерной непрерывности.

Определение 10. *Отображение f множества $E \subset E_x^n$ в пространство E_y^m называется равномерно непрерывным, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, что для любых точек $x' \in E$ и $x'' \in E$, удовлетворяющих условию $\rho(x', x'') < \delta$, выполняется неравенство $\rho(f(x'), f(x'')) < \varepsilon$.*

Для отображений имеет место и утверждение, аналогичное теореме Кантора (см. п. 19.5) для непрерывных функций.

Лемма 3. *Непрерывное отображение ограниченного замкнутого множества $E \subset E_x^n$ в пространство E_y^m является равномерно непрерывным.*

Доказательство. Если $f(x) = \{f_j(x),\ j = 1, 2, \ldots, m\}$, является непрерывным отображением ограниченного замкнутого множества $E \in E_x^n$ в пространство E_y^m, то каждая функция f_j, $j = 1, 2, \ldots, m$, будучи непрерывной на E, является и равномерно непрерывной на этом множестве. Поэтому для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, что если $x' \in E$, $x'' \in E$ и $\rho(x', x'') < \delta$, то

$$|f_j(x') - f_j(x'')| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{m}}, \quad j = 1, 2, \ldots, m;$$

откуда следует, что

$$\rho(f(x'), f(x'')) = \sqrt{\sum_{j=1}^{m} [f_j(x') - f_j(x'')]^2} < \varepsilon,$$

а это и означает равномерную непрерывность отображения f.

Пусть теперь $E \subset E_x^n$, $D \subset E_y^m$, $y = y(x)$ — отображение множества E в E_y^m, причем $y(E) \subset D$ и $z = z(y)$ — отображение D в E_z^p.

В этом случае имеет смысл суперпозиция $z = z(y(x))$, отображающая множество $E \subset E_x^n$ в p-мерное пространство E_z^p.

Отметим, что если отображение $y(x)$ множества E непрерывно в точке $x^{(0)} \in E$, а отображение $z(y)$ определено в некоторой окрестности точки $y^{(0)} = y(x^{(0)})$, то существует такая окрестность O_x точки $x^{(0)}$, что на множестве $E \cap O_x$ имеет смысл суперпозиция $z(y(x))$.

Действительно, пусть O_y — окрестность точки $y^{(0)}$, на которой определено отображение $z(y)$, согласно (41.27), для нее существует такая окрестность O_x, что $y(O_x \cap E) \subset O_y$. Очевидно, что для всех точек $x \in O_x \cap E$ и имеет смысл суперпозиция $z(y(x))$.

Напомним еще, что согласно введенной для функции терминологии (см. п. 4.1), отображение $y(x)$ множества $E \subset E_x^n$ в пространство E_y^m называется *взаимно однозначным*, если разным точкам множества E при этом отображении соответствуют разные точки. В этом случае говорят также, что множество E взаимно однозначно отображается посредством этого отображения на множество $y(E)$. При выполнении этого условия на множестве $y(E)$ существует однозначное обратное отображение (обратная функция) $x(y) = x$, где x таково, что $y(x) = y$. Поэтому $x(y(x)) = x$, т. е. это тождественное отображение (*тождественным отображением* множества E называется отображение, которое каждой точке $x \in E$ ставит в соответствие эту же точку).

Если все функции $y_i(x)$, $i = 1, 2, \ldots, m$, задающие отображение $y(x)$, определены и непрерывно дифференцируемы на некотором открытом множестве G, то отображение (41.26) называется *непрерывно дифференцируемым отображением* множества G.

Рассмотрим теперь два свойства якобианов отображений.

Лемма 4. *Пусть* $y = y(x) = \{y_i = y_i(x_1, \ldots, x_n),\ i = 1, 2, \ldots, n\}$ *является непрерывно дифференцируемым отображением открытого множества* $G \subset E_x^n$ *в некоторое открытое множество* $D \subset E_y^n$ *и пусть* $z = z(y) = \{z_i = z_i(y_1, \ldots, y_n),\ i = 1, 2, \ldots, n\}$ — *непрерывно дифференцируемое отображение множества* D *в* E_z^n, *тогда суперпозиция этих отображений* $z(x) = z(y(x))$, $x = (x_i) \in G$ *является непрерывно дифференцируемым отображением* G *в* E_z^n *и*

$$\frac{\partial(z_1, \ldots, z_n)}{\partial(x_1, \ldots, x_n)} = \frac{\partial(z_1, \ldots, z_n)}{\partial(y_1, \ldots, y_n)} \frac{\partial(y_1, \ldots, y_n)}{\partial(x_1, \ldots, x_n)}, \quad x = (x_i) \in G. \tag{41.29}$$

Действительно, непрерывная дифференцируемость отображения $z(y(x))$ следует из теоремы о частных производных для сложной функции (п. 20.3) и теоремы о непрерывности суперпозиции непрерывных функций (п. 19.3). Докажем формулу (41.29).

Замечая, что $\dfrac{\partial z_i}{\partial x_j} = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{\partial z_i}{\partial y_k} \dfrac{\partial y_k}{\partial x_j}$ и применяя известную из алгебры теорему о том, что определитель произведения матриц равен произведению определителей перемножаемых матриц, т. е.

$$\det(\|a_{ik}\| \cdot \|b_{kj}\|) = \det\left\|\sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}\right\| = \det\|a_{ik}\| \det\|b_{kj}\|,$$

получим

$$\frac{\partial(z_1, \ldots, z_n)}{\partial(x_1, \ldots, x_n)} = \det\left\| \frac{\partial z_i}{\partial x_j} \right\| = \det\left\| \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial z_i}{\partial y_k} \frac{\partial y_k}{\partial x_j} \right\| =$$

$$= \det\left\| \frac{\partial z_i}{\partial y_k} \right\| \det\left\| \frac{\partial y_k}{\partial x_j} \right\| = \frac{\partial(z_1, \ldots, z_n)}{\partial(y_1, \ldots, y_n)} \frac{\partial(y_1, \ldots, y_n)}{\partial(x_1, \ldots, x_n)}.$$

Формула (41.29) доказана. При $n = 1$ она превращается в хорошо известную формулу о производной сложной функции:

$$\frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy} \frac{dy}{dx}. \qquad (41.29')$$

Таким образом, для функций многих переменных формула (41.29′) допускает двоякое обобщение: формулу (20.26) для частной производной суперпозиции функций и формулу (41.29) для якобиана суперпозиции отображений.

Лемма 5. *Пусть $y = y(x) = \{y_i = y_i(x_1, \ldots, x_n),\ i = 1, 2, \ldots, n\}$ является взаимно однозначным непрерывно дифференцируемым отображением открытого множества $G \subset E_x^n$ на открытое множество $D \subset E^n$ и пусть обратное отображение $x = x(y) = \{x_i = x_i(y_1, \ldots, y_n),\ i = 1, 2, \ldots, n\}$, которое, очевидно, является однозначным, также непрерывно дифференцируемо на своей области определения D. Тогда*

$$\frac{\partial(y_1, \ldots, y_n)}{\partial(x_1, \ldots, x_n)} \cdot \frac{\partial(x_1, \ldots, x_n)}{\partial(y_1, \ldots, y_n)} = 1.$$

Эту формулу можно переписать в виде

$$\frac{\partial(y_1, \ldots, y_n)}{\partial(x_1, \ldots, x_n)} = \frac{1}{\dfrac{\partial(x_1, \ldots, x_n)}{\partial(y_1, \ldots, y_n)}}, \qquad (41.30)$$

т. е. якобиан отображения, обратного к заданному отображению, равен обратной величине якобиана данного отображения.

Из леммы, в частности следует, что при сделанных предположениях оба рассматриваемых якобиана не обращаются в нуль.

Доказательство. В самом деле, отображение $x(y(x))$ является тождественным отображением, в координатном виде оно записывается условием равенства координат образа и прообраза:

$$x_i = x_i, \quad i = 1, 2, \ldots, n;$$

отсюда следует, что

$$\frac{\partial(x_1, \ldots, x_n)}{\partial(x_1, \ldots, x_n)} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 \end{vmatrix} = 1. \tag{41.31}$$

С другой стороны, по свойству якобиана суперпозиции отображений (см. 41.29) для отображения $x(y(x))$ имеем

$$\frac{\partial(x_1, \ldots, x_n)}{\partial(x_1, \ldots, x_n)} = \frac{\partial(x_1, \ldots, x_n)}{\partial(y_1, \ldots, y_n)} \frac{\partial(y_1, \ldots, y_n)}{\partial(x_1, \ldots, x_n)}. \tag{41.32}$$

Сравнивая (41.31) и (41.32), мы и получим (41.30).

Формула (41.30) является, очевидно, обобщением формулы для производной обратной функции

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}}.$$

41.5. Отображения с не равным нулю якобианом Принцип сохранения области

Прежде всего рассмотрим вопрос о существовании отображения, обратного к данному. Как мы знаем, в случае $n = 1$ для непрерывно дифференцируемой на некотором отрезке функции условие необращения в нуль ее производной (которое влечет ее строгую монотонность) является достаточным условием существования у нее обратной однозначной непрерывно дифференцируемой функции. В случае же произвольного n дело существенно осложняется: соответствующие точечные условия на дифференциальные свойства отображения позволяют лишь утверждать локально, т. е. в окрестности точки, существование обратного отображения. Более точно имеет место следующая теорема.

Теорема 3. *Пусть G — открытое множество в E^n и пусть*

$$y = f(x) = \begin{cases} y_1 = f_1(x_1, \ldots, x_n), \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ y_n = f_n(x_1, \ldots, x_n) \end{cases} \tag{41.33}$$

— непрерывно дифференцируемое отображение G в E^n. Пусть, далее, $x^{(0)} = (x_i^{(0)}) \in G$ и якобиан отображения (41.33) *не обращается в нуль в точке $x^{(0)}$:*

$$\left. \frac{\partial(y_1, \ldots, y_n)}{\partial(x_1, \ldots, x_n)} \right|_{x^{(0)}} \neq 0.$$

Тогда существует окрестность O_y точки $y^{(0)} = f(x^{(0)})$, на которой определено, и притом единственное, однозначное непрерывно дифференцируемое обратное отображение $x = f^{-1}(y)$, такое, что $f^{-1}(y^{(0)}) = x^{(0)}$. При этом у обратного отображения его якобиан на O_y не равен нулю.

Доказательство. Рассмотрим функции

$$F_i(x, y) = y_i - f_i(x_1, \dots, x_n), \ i = 1, 2, \dots, n. \tag{41.34}$$

Эти функции определены для всех $y = (y_i) \in E_y^n$ и всех $x = (x_i) \in G$. С помощью них система равенств (41.33), задающих отображение f, перепишется в виде

$$F_i(x, y) = 0, \ i = 1, 2, \dots, n. \tag{41.35}$$

При этом функции $F_i(x, y)$ определены и непрерывно дифференцируемы в некоторой окрестности точки $(x^{(0)}, y^{(0)})$ (за такую окрестность можно взять, например, $G \times E_y^n$),

$$F_i(x^{(0)}, y^{(0)}) = 0$$

и

$$\left.\frac{\partial (F_1, \dots, F_n)}{\partial (x_1, \dots, x_n)}\right|_{(x^{(0)}, y^{(0)})} = (-1)^n \left.\frac{\partial (f_1, \dots, f_n)}{\partial (x_1, \dots, x_n)}\right|_{x^{(0)}} \neq 0;$$

таким образом, выполнены все условия теоремы 2 настоящего параграфа. В силу этой теоремы уравнения (41.35), или, что то же, систему (41.33), можно разрешить, и притом единственным образом, относительно переменных $x_1, \dots, x_n$ в некоторой окрестности точки $y^{(0)}$; иначе говоря, существует окрестность O_y точки $y^{(0)}$ и единственная система непрерывно дифференцируемых функций

$$x_1 = x_1(y_1, \dots, y_n), \dots x_n = x_n(y_1, \dots, y_n),$$

определенных на O_y и удовлетворяющих уравнениям (41.35), или, что то же, уравнениям (41.33):

$$f(x(y)) = y.$$

Это и означает, что $x(y)$ является отображением, обратным данному отображению f, т. е. $x(y) = f^{-1}(y)$.

В силу формулы (41.30) из условия необращения в нуль в точке $x^{(0)}$ якобиана отображения f сразу следует необращение в нуль в точке $y^{(0)}$ якобиана обратного отображения f^{-1}, а так как оно непрерывно дифференцируемо, то якобиан не обращается в нуль и в некоторой окрестности точки $y^{(0)}$. Без ограничения общности можно считать, что этой окрестностью является O_y (в случае необходимости ранее указанную окрестность O_y надо уменьшить и снова обозначить через O_y).

Теорема доказана.

Следствие 1. *При непрерывно дифференцируемом отображении открытого множества G в E^n образ точки, в которой якобиан отображения не обращается в нуль, является внутренней точкой образа множества G.*

Доказательство. Если в точке $x^{(0)} \in G$ якобиан отображения не равен нулю, а $y^{(0)} = f(x^{(0)})$, то в силу теоремы 3 существует окрестность O_y точки $y^{(0)}$, на которой определено обратное отображение f^{-1}. Отсюда, в частности, следует, что в каждую точку $y \in O_y$ при заданном отображении f отображается по крайней мере одна точка $x \in G$, т. е. $O_y \subset f(G)$.

Таким образом, для точки $y^{(0)} \in f(G)$ существует ее окрестность $O_y \subset f(G)$, а это и означает, что точка $y^{(0)}$ внутренняя для множества $f(G)$.

Следствие 1 доказано.

Следствие 2 (принцип сохранения открытого множества). *Пусть отображение f отображает открытое множество $G \subset E^n$ в пространство E^n. Если отображение f непрерывно дифференцируемо на G и если его якобиан не обращается в нуль в G, то образ множества G также является открытым множеством.*

Доказательство. Если $y \in f(G)$, то, согласно следствию 1, точка y является внутренней точкой множества $f(G)$. Так как y — произвольная точка множества $f(G)$, то это означает, что множество $f(G)$ состоит только из внутренних точек, т. е. открыто. Следствие доказано.

Следствие 3. *Пусть отображение f отображает открытое множество $G \subset E^n$ в пространство E^n. Если отображение f непрерывно дифференцируемо на G и если его якобиан не обращается в нуль в G, то для каждой точки $x^{(0)} \in G$ существует ее окрестность, которая при отображении f взаимно однозначно отображается на некоторую окрестность O_y точки $y^{(0)}$.*

Доказательство. Возьмем окрестность O_y точки $y^{(0)}$, построенную при доказательстве теоремы 3, на которой отображение f^{-1} взаимно однозначно. Согласно следствию 2, множество $f^{-1}(O_y)$ открыто и, следовательно, является окрестностью точки x, которую мы и обозначим через O_x. Очевидно, $f(O_x) = O_y$.

Следствие доказано.

Упражнение 2. Построить пример непрерывно дифференцируемого отображения некоторой плоской области, якобиан которого нигде не обращается в ноль и которое не взаимно однозначно

Теорема 5 (принцип сохранения области). *Образ n-мерной области в n-мерном пространстве при непрерывно дифференци-*

руемом отображении с якобианом, не обращающимся в нуль, является областью.

Доказательство. Пусть G — область, $G \subset E^n$ и $y = f(x)$ — отображение G в E^n, удовлетворяющее условиям теоремы. Согласно следствию 2 теоремы 3, множество $f(G)$ открыто. Покажем, что любые две его точки можно соединить кривой, целиком лежащей в $f(G)$.

Действительно, если $y' \in f(G)$ и $y'' \in f(G)$, то по самому определению множества $f(G)$ существуют точки $x' \in G$ и $x'' \in G$ такие, что $f(x') = y'$ и $f(x'') = y''$. В силу же того, что G — область, существует кривая с представлением $x(t)$, $\alpha \leqslant t \leqslant \beta$, соединяющая в G точки x' и x'':

$$x' = x(\alpha),\ \ x'' = x(\beta)\ \text{ и }\ x(t) \in G,\ \ \alpha \leqslant t \leqslant \beta.$$

Очевидно, что кривая с представлением $f(x(t))$, $\alpha \leqslant t \leqslant \beta$ соединяет в $f(G)$ точки y' и y'', т. е. $f(x(\alpha)) = y'$, $f(x(\beta)) = y''$ и $f(x(t)) \in f(G)$ при $\alpha \leqslant t \leqslant \beta$.

Теорема доказана.

41.6. Неявные функции, определяемые уравнением, в котором нарушаются условия единственности. Особые точки плоских кривых

Мы уже знаем, что если некоторая точка $x^{(0)} = (x_i^{(0)})$ удовлетворяет уравнению

$$F(x_1, \ldots, x_n) = 0 \tag{41.36}$$

и в этой точке производная $\frac{\partial F}{\partial x_i}$ не равна нулю, то, при соответствующих условиях на непрерывность самой функции f и указанной производной, уравнение (41.36) разрешимо в некоторой окрестности точки $x^{(0)}$ относительно переменной x_i и решение является непрерывно дифференцируемой функцией остальных координат.

Естественно возникает вопрос: а что будет в случае, когда в точке $x^{(0)}$ частные производные по всем аргументам обращаются в нуль — определяет в этом случае уравнение (41.36) какие-либо функции или нет? Остановимся на этом вопросе, однако ввиду его сложности ограничимся лишь рассмотрением двумерного случая.

Итак, мы будем рассматривать уравнение

$$F(x, y) = 0, \tag{41.37}$$

где функция F определена и непрерывно дифференцируема в некоторой окрестности точки (x_0, y_0), такой, что

$$F(x_0, y_0) = 0. \tag{41.38}$$

Пусть

$$F_x(x_0,\ y_0)=F_y(x_0,\ y_0)=0. \qquad (41.39)$$

Покажем, что и при выполнении этих условий уравнение (41.37) иногда может быть разрешено в окрестности точки (x_0, y_0) относительно одной из переменных, так что получится непрерывно дифференцируемая функция; однако это можно сделать, вообще говоря, не единственным образом. Таким образом, условие

$$F_x^2(x_0,\ y_0)+F_y^2(x_0,\ y_0)\neq 0, \qquad (41.40)$$

которое в нашем случае [см. (41.39)] не выполняется и которое позволяет применить теорему 1 о неявных функциях к одному из переменных, естественно назвать *условием единственности* разрешимости уравнения (41.37).

Определение 11. *Точка* (x_0, y_0), *удовлетворяющая условиям* (41.38) *и* (41.39), *называется особой точкой уравнения* (41.37).

Особая точка называется изолированной, если существует ее окрестность, в которой она является единственной особой точкой.

Геометрически, если уравнение (41.37) является неявным представлением какой-либо кривой, то в окрестности особых точек этого уравнения кривая, вообще говоря, не является графиком некоторой гладкой однозначной функции (как это имеет место при выполнении условия (41.40)); здесь возможны разные особенности, которые мы сейчас и рассмотрим.

Введем для краткости записи обозначения

$$F_{xx}(x_0,\ y_0)=F_{xx}^0,\ F_{xy}(x_0,\ y_0)=F_{xy}^0,\ F_{yy}(x_0,\ y_0)=F_{yy}^0.$$

Теорема 5. *Пусть функция* $F(x, y)$ *определена и дважды непрерывно дифференцируема в некоторой окрестности точки* (x_0, y_0), *которая является особой изолированной точкой для уравнения* (41.37) *и пусть*

$$F_{xx}^0 F_{yy}^0-F_{xy}^{0\,2}\neq 0.$$

Тогда, если

$$F_{xx}^0 F_{yy}^0-F_{xy}^{0\,2}>0, \qquad (41.41)$$

то точка (x_0, y_0) *является изолированным решением уравнения* (41.37), *т. е. существует окрестность точки* (x_0, y_0), *никакая точка которой, за исключением самой точки* (x_0, y_0), *не удовлетворяет уравнению* (41.37); *если же*

$$F_{xx}^0 F_{yy}^0-F_{xy}^{0\,2}<0, \qquad (41.42)$$

то уравнение (41.37) *разрешимо в некоторой окрестности точки* (x_0, y_0), *но не однозначно: имеются две различные дифференцируемые функции, удовлетворяющие уравнению* (41.37). *Поэтому точка* (x_0, y_0) *называется в этом случае двойной точкой.*

Например, если

$$F^0_{yy} \neq 0, \tag{41.43}$$

то существуют две дифференцируемые функции $f_1(x)$ и $f_2(x)$, определенные в некоторой окрестности точки x_0 и такие, что в этой окрестности $F(x, f_1, (x)) = 0$, $F(x, f_2(x)) = 0$, причем $f_1(x_0) = f_2(x_0) = y_0$, а производные функции $f_1(x)$ и $f_2(x)$ в точке x_0 являются различными корнями уравнения

$$F^0_{xx} + 2F^0_{xy}k + F^0_{yy}k^2 = 0, \text{*)} \tag{41.44}$$

Доказательство. Пусть выполнено условие (41.41), вместе с условиями (41.39) оно дает условие строгого экстремума для функции $F(x, y)$ в точке (x_0, y_0) (см. теорему 3 в п. 40.2). Поэтому существует окрестность O точки (x_0, y_0), такая, что при $(x, y) \in O$ и $(x, y) \neq (x_0, y_0)$ либо всегда $F(x, y) > F(x_0, y_0)$, либо всегда $F(x, y) < F(x_0, y_0)$, и так как $F(x_0, y_0) = 0$, то $F(x, y) \neq 0$ для всех $(x, y) \in O$, $(x, y) \neq (x_0, y_0)$, т. е. точка (x_0, y_0) является изолированным корнем уравнения (41.37)**).

Пусть теперь выполнено условие (41.42). Разложим функцию $F(x, y)$ по формуле Тейлора в окрестности точки (x_0, y_0) до второго порядка; тогда, учитывая условия (41.38) и (41.39), получим

$$F(x, y) = \frac{1}{2}\left[F^0_{xx}(x-x)^2 + 2F^0_{xy}(x-x_0)(y-y_0) + \right.$$
$$\left. + F^0_{yy}(y-y_0)^2\right] + o(r^2), \tag{41.45}$$

где $r = \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}$.

Положим $x - x_0 = r\cos\varphi$, $y - y_0 = r\sin\varphi$.

Очевидно, (r, φ) — полярные координаты точки (x, y), причем за начало полярной системы координат принята точка (x_0, y_0). В этих координатах

$$F(x, y) = \frac{r^2}{2}\left(F^0_{xx}\cos^2\varphi + 2F^0_{xy}\cos\varphi\sin\varphi + F^0_{yy}\sin^2\varphi\right) + o(r^2) =$$
$$= \frac{r^2}{2}P(\varphi) + o(r^2), \tag{41.46}$$

где

$$P(\varphi) = F^0_{xx}\cos^2\varphi + 2F^0_{xy}\cos\varphi\sin\varphi + F^0_{yy}\sin^2\varphi, \tag{41.47}$$

или при $\varphi \neq \frac{\pi}{2}(2k+1)$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$:

---

*) Корни этого уравнения вещественны и различны в силу условий (41.42) и (41.43).

**) Отметим, что в доказательстве этого утверждения используется не то, что точка (x_0, y_0) является изолированной особой точкой, а лишь то, что она является просто особой точкой, в которой выполняется условие (41.41).

$$P(\varphi)=\cos^2\varphi\left(F^0_{xx}+F^0_{xy}\operatorname{tg}\varphi+F^0_{yy}\operatorname{tg}^2\varphi\right). \qquad (41.48)$$

Предположим теперь, что выполнено также и условие (41.43). Пусть k_1 и k_2 — корни уравнения (41.44) и пусть $\varphi_1=\operatorname{arctg} k_1$ и $\varphi_2=\operatorname{arctg} k_2$, тогда

$$\varphi_1\neq\pm\frac{\pi}{2}, \quad \varphi_2\neq\pm\frac{\pi}{2}, \qquad (41.49)$$

и из (41.48) следует, что

$$P(\varphi)=\cos^2\varphi(\operatorname{tg}\varphi-\operatorname{tg}\varphi_1)(\operatorname{tg}\varphi-\operatorname{tg}\varphi_2). \qquad (41.50)$$

Из формул (41.47) и (41.48) видно, что функция $P(\varphi)$ обращается в ноль только для углов вида $\varphi=\varphi_1+k\pi$ и $\varphi=\varphi_2+k\pi$, $k=0, \pm1, \pm2, \ldots$, причем при переходе аргумента через эти значения она меняет знак. Нам будет удобно интерпретировать функцию $P(\varphi)$ как функцию точки окружности C с центром в точке (x_0, y_0) и радиуса равного 1 (такой радиус выбирается для простоты, чтобы длины дуг совпадали с углами φ).

Пусть $\varepsilon>0$. Обозначим через $U_1=U_1(\varepsilon)$ открытый угол, определяемый неравенством $\varphi_1-\varepsilon<\varphi<\varphi_1+\varepsilon$, т. е.

$$U_1=\{(r, \varphi):\varphi_1-\varepsilon<\varphi<\varphi_1+\varepsilon\},$$

соответственно положим

$$U_2=\{(r, \varphi):\varphi_2-\varepsilon<\varphi<\varphi_2+\varepsilon\};$$

при этом выберем $\varepsilon>0$ столь малым, чтобы U_1 и U_2 не пересекались и не содержали в себе полуоси ординат, а значит, и вообще вертикальных полупрямых [последнее всегда можно выполнить вследствие условий (41.49)].

Пусть U_1^* и U_2^* углы, центрально симметричные с U_1 и U_2 относительно точки (x_0, y_0):

$$U_1^*=\{(r, \varphi):\varphi_1+\pi-\varepsilon<\varphi<\varphi_1+\pi+\varepsilon\},$$

$$U_2^*=\{(r, \varphi):\varphi_2+\pi-\varepsilon<\varphi<\varphi_2+\pi+\varepsilon\}.$$

В силу выбора числа ε множества U_1, U_2, U_1^* и U_2^* попарно не пересекаются (рис. 126).

Рассмотрим теперь функцию $P(\varphi)$ как функцию точки вышеуказанной окружности C. Точку окружности C, которой соответствует полярный угол φ, будем для простоты также обозначать через φ.

Удалим из указанной окружности интервалы с центрами в точках φ_1, φ_2, $\varphi_1+\pi$ и $\varphi_2+\pi$ длины 2ε*); в силу выбора $\varepsilon>0$ эти интервалы не пересекаются. Оставшееся множество, которое обо-

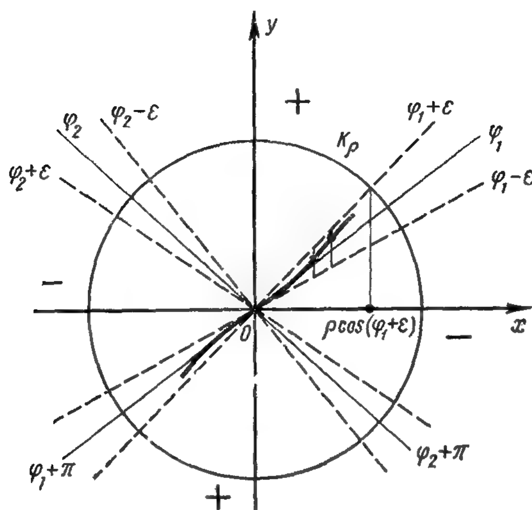


Рис. 126

значим B, является ограниченным замкнутым множеством. На B функция $P(\varphi)$ непрерывна и не обращается в нуль, поэтому

$$\inf_{\varphi\in B}|P(\varphi)|=\mu>0. \tag{41.51}$$

Обозначим через K_ρ замкнутый круг с центром в точке (x_0, y_0) и радиуса ρ:

$$K_\rho=\{(r, \varphi): 0\leqslant r\leqslant\rho\},$$

а через L_ρ обозначим множество, которое получается вычитанием (в теоретикомножественном смысле, см. п. 1.3) множеств U_1, U_2, U_1^* и U_2^* из круга K_ρ.

Очевидно, что в силу (41.51)

$$\inf_{(r,\varphi)\in L_\rho}|P(\varphi)|=\mu>0.$$

*) Интервалом длины 2ε на окружности с центром в точке, полярный угол которой равен φ_0, называется множество ее точек, полярные углы φ которых удовлетворяют неравенству $\varphi_0-\varepsilon<\varphi<\varphi_0+\varepsilon$.

Теперь, замечая, что из (41.46) следует

$$F(x, y)=\frac{r^2}{2}[P(\varphi)+\alpha(r, \varphi)], \tag{41.52}$$

где $\lim\limits_{r\to 0}\alpha(r, \varphi)=0$, выберем $\rho>0$ так, чтобы при $r\leqslant\rho$ выполнялось неравенство

$$|\alpha(r, \varphi)|<\mu. \tag{41.53}$$

Тогда из (41.52) следует, что для всех точек $(r,\varphi)\in L_\rho$ выражение, стоящее в правой части формулы (41.52), имеет знак $P(\varphi)$.

Множество L_ρ состоит из четырех замкнутых секторов (см. рис. 126), на каждом из которых за вычетом их центра функция $P(\varphi)$ и, значит, в силу выбора ρ и функция $F(x, y)$ принимают значения одного и того же знака, а на соседних секторах — разных.

Рассмотрим теперь угол $U_1=U_1(\varepsilon)$. Пусть для определенности $0\leqslant\varphi_1<\frac{\pi}{2}$. Пересечение замыкания $\overline{U}_1$ угла U_1 с вертикальной прямой $x=x^*$, $x_0<x^*\leqslant x_0+\rho\cos(\varphi_1+\varepsilon)$, представляет собой отрезок, на верхнем и нижнем концах которого функция $F(x^*, y)$ принимает значения разного знака.

Функция $F(x^*, y)$, рассматриваемая как функция одного переменного y при фиксированном x^*, будучи непрерывной на указанном отрезке обращается в некоторой его точке y^* в нуль, т. е. для каждого x^*, где $x_0<x^*\leqslant x_0+\rho\cos(\varphi_1+\varepsilon)$, существует по крайней мере одна точка y^*, такая, что

$$F(x^*, y^*)=0,\quad (x^*, y^*)\in U_1(\varepsilon)\cap K_\rho. \tag{41.54}$$

Определим функцию $y=f_1(x)$ как функцию, ставящую в соответствие числу x^* число y^*:

$$f_1(x^*)=y^*,\quad x_0<x^*\leqslant x_0+\rho\cos(\varphi_1+\varepsilon).$$

Покажем, что при достаточно малых ε и ρ функция f_1 определена однозначно, т. е. существуют такие $\varepsilon>0$ и $\rho>0$, что при заданном x^* условия (41.54) однозначно определяют y^*.

Допустим противное. Возьмем последовательности $\varepsilon_n\to 0$ и $\rho_n\to 0$ при $n\to\infty$. Тогда существуют две последовательности точек с одинаковыми абсциссами x_n и разными ординатами y_n' и y_n'', такие, что

$$(x_n, y_n')\in U_1(\varepsilon_n)\cap K_{\rho_n},\ F(x_n, y_n')=0,$$
$$(x_n, y_n'')\in U_1(\varepsilon_n)\cap K_{\rho_n},\ F(x_n, y_n'')=0.$$

Тогда в силу теоремы Ролля на отрезке $[y_n', y_n'']$ прямой $x=x_n$ найдется точка y_n такая, что

$$F_y(x_n, y_n)=0, \qquad (41.55)$$

при этом, очевидно,

$$(x_n, y_n)\in U_1(\varepsilon_n)\cap K_{\rho_n};$$

по условию (см. 41.39) мы имели еще

$$F_y(x_0, y_0)=0. \qquad (41.56)$$

По формуле конечных приращений, примененной к функции $F_y(x, y)$,

$$F_y(x_n, y_n)-F_y(x_0, y_0)=$$
$$=F_{yx}(\xi_n, \eta_n)(x_n-x_0)+F_{yy}(\xi_n, \eta_n)(y_n-y_0).$$
$$(\xi_n, \eta_n)\in U_1(\varepsilon_n)\cap K_{\rho_n},$$

откуда в силу (41.55) и (41.56)

$$F_{xy}(\xi_n, \eta_n)+F_{yy}(\xi_n, \eta_n)\frac{y_n-y_0}{x_n-x_0}=0. \qquad (41.57)$$

Пусть $(x_n, y_n)=(r_n, \psi_n)$. Очевидно,

$$|\psi_n-\varphi_1|<\varepsilon_n;$$

поэтому из условия $\varepsilon_n\to 0$ следует, что $\psi_n\to\varphi_1$ при $n\to\infty$, и так как $\operatorname{tg}\psi_n=\frac{y_n-y_0}{x_n-x_0}$, то

$$\lim_{n\to\infty}\frac{y_n-y_0}{x_n-x_0}=\operatorname{tg}\varphi_1=k_1. \qquad (41.58)$$

Переходя к пределу в равенстве (41.57) при $n\to\infty$, в силу (41.58) имеем

$$F_{xy}^0+F_{yy}^0k_1=0,$$

т. е.

$$k_1=-\frac{F_{xy}^0}{F_{yy}^0};$$

подставляя это значение корня в уравнение (41.44), получим

$$F_{xx}^0F_{yy}^0-F_{xy}^{02}=0,$$

что противоречит условию (41.42).

Итак, функция $y=f_1(x)$ действительно однозначно определяется при достаточно малых ε и ρ. В дальнейшем будем предполагать, что ε и ρ выбраны именно таким образом.

Доопределим функцию f_1 в точке x_0, положив $y_0 = f_1(x_0)$. Очевидно, по самому определению функции $f_1(x)$ имеем

$$F\left(x,\ f_1(x)\right) = 0,\ x_0 \leqslant x \leqslant x_0 + \rho\cos(\varphi_1 + \varepsilon).$$

Покажем, что у функции $f_1(x)$ существует в точке x_0 производная справа и что она равна k_1. Пусть произвольно фиксировано $\varepsilon > 0$. Из данной выше конструкции видно, что существует $\rho = \rho(\varepsilon) > 0$ такое, что соответствующая часть графика функции $f_1(x)$ целиком лежит в $U_1(\varepsilon) \frown K_\rho$:

$$\left(x,\ f_1(x)\right) \in U_1(\varepsilon) \frown K_\rho,\ x_0 \leqslant x \leqslant x_0 + \rho\cos(\varphi_1 + \varepsilon). \qquad (41.59)$$

Возьмем $\delta = \rho\cos(\varphi_1 + \varepsilon)$ и пусть x таково, что $0 < x - x_0 < \delta$, $y = f(x)$ и $(x,\ y) = (r,\ \varphi)$. В силу (41.59) имеем

$$|\varphi - \varphi_1| < \varepsilon.$$

Это означает, что $\lim\limits_{x \to x_0+0} \varphi = \varphi_1$ и потому $\lim\limits_{x \to x_0+0} \operatorname{tg}\varphi = \operatorname{tg}\varphi_1$. Поскольку $\operatorname{tg}\varphi = \dfrac{y - y_0}{x - x_0}$, то из доказанного следует

$$\lim_{x \to x_0+0} \frac{y - y_0}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0+0} \frac{f_1(x) - f_1(x_0)}{x - x_0} = \operatorname{tg}\varphi_1,$$

т. е. у функции $f_1(x)$ существует производная справа в точке x_0, равная

$$\operatorname{tg}\varphi_1 = k_1.$$

Подобным же образом из рассмотрения поведения функции $F(x, y)$ в угле U_1^* доказывается, что при некотором $\delta' > 0$ на отрезке $[x_0 - \delta',\ x_0]$ существует функция $f_1(x)$, такая, что

$$F\left(x,\ f_1(x)\right) = 0,\ x_0 - \delta' \leqslant x \leqslant x_0,$$

$$\left(x,\ f_1(x)\right) \in U_1^*,\ x_0 - \delta' \leqslant x \leqslant x_0,$$

$$f_1'(x_0) = k_1$$

(под производной, естественно, в данном случае понимается производная слева).

Если число ρ взять столь малым, чтобы в окрестности точки $(x_0,\ y_0)$ радиуса ρ не содержалось других особых точек уравнения (41.37), кроме точки $(x_0,\ y_0)$, то функция $f_1(x)$ будет дифференцируемой и во всех точках $x \neq x_0$. Это сразу следует из доказанной выше теоремы о неявных функциях (см. теорему 1 в п. 41.1).

В результате мы и получили функцию $f_1(x)$, определенную в некоторой окрестности точки x_0 и обладающую всеми требуемыми свойствами.

Аналогично доказывается существование функции $f_2(x)$, также являющейся решением уравнения (41.37) и удовлетворяющей условиям теоремы, график которой проходит в углах U_2 и U_2^*.

Если $F_{yy}^0 = 0$, а $F_{xx}^0 \neq 0$, то все рассмотрения проводятся аналогичным образом; следует только поменять местами роль осей Ox и Oy, так что в результате получим решение уравнения (41.37) в виде функций от переменной y: $f_1(y)$ и $f_2(y)$.

Если, наконец, $F_{xx}^0 = F_{yy}^0 = 0$ и, значит $F_{xy}^0 \neq 0$, то проще всего сделать замену переменных:

$$x = \xi + \eta,$$
$$y = \xi - \eta$$

$\left(\text{повернуть оси координат на угол } \frac{\pi}{4}\right)$, тогда как в этом легко убедиться непосредственным дифференцированием:

$$F_{\xi\xi}^0 = -F_{\eta\eta}^0 = 2F_{xy}^0 \neq 0, \quad F_{\xi\eta}^0 = 0,$$

т. е. в новой координатной системе получим уже изученный случай. В частности, уравнение (41.44) для угловых коэффициентов касательных в особой точке в координатной системе ξ, η имеет вид

$$k^2 - 1 = 0,$$

и, значит, $k_{1,2} = \pm 1$. Иначе говоря, биссектрисы координатных углов, являющиеся координатными осями в старой системе координат x, y, суть касательные к графикам двух функций, которые определяются уравнением (41.37) в некоторой окрестности рассматриваемой особой точки.

Теорема 5 доказана.

Если уравнение $F(x, y) = 0$ является неявным представлением какой-либо кривой, то в особой точке (x_0, y_0) этого уравнения кривая может (хотя и не обязана) иметь какие-либо особенности, т. е. в окрестности особой точки этого уравнения кривая, вообще говоря, не является графиком некоторой гладкой однозначной функции.

Следует напомнить также, что геометрическое место точек, координаты которых удовлетворяют уравнению (41.37), вообще говоря, не являются всегда кривой в смысле данного ранее определения кривой (см. п. 17.1), задаваемой параметрически.

Рассмотрим примеры. 1. Пусть дано уравнение $y^2(x^2 + y^2 + 1) = 0$. Здесь $F(x, y) = y^2(x^2 + y^2 + 1)$, поэтому $F_x = 2xy^2$, $F_y = 2x^2y + 4y^3 + 2y$. Условия особой точки (41.38) и (41.39) дают в этом случае

$$x_0 = 0, \ y_0 = 0.$$

Таким образом, особой точкой является точка (0, 0), однако в этой точке кривая, определяемая уравнением, не имеет особенно-

сти, так как данное уравнение (множитель $x^2 + y^2 + 1$ нигде не обращается в ноль) равносильно уравнению $y = 0$ и рассматриваемая кривая является графиком явной функции $f(x) \equiv 0$. Отметим, что, как легко убедиться, в этом случае в точке $(0, 0)$

$$F_{xx} F_{yy} - F_{xy}^2 = 0. \tag{41.60}$$

2. Для уравнения

$$(x^2 + y^2)(x^2 + y^2 - 1) = 0 \tag{41.61}$$

условия особой точки (41.39) дают

$$2x^3 + 2xy^2 - x = 0,$$

$$2y^3 + 2x^2y - y = 0.$$

Складывая и вычитая эти уравнения, получим

$$(x + y)(2x^2 + 2y^2 - 1) = 0,$$

$$(x - y)(2x^2 + 2y^2 - 1) = 0.$$

Отсюда либо $x = y = 0$, либо $2x^2 + 2y^2 - 1 = 0$, однако точка (x, y), координаты которой удовлетворяют последнему соотношению, не является корнем уравнения (41.61) (для нее $x^2 + y^2 = \frac{1}{2}$, и, значит, ни один из сомножителей левой части (41.61) не обращается в ноль).

Таким образом, единственной особой точкой является $(0, 0)$. Легко проверить, что здесь выполняется условие (41.41) и, значит, точка $(0, 0)$ является изолированным корнем уравнения (41.61). Геометрически, как это сразу видно, уравнение (41.61) задает единичную окружность и ее центр $(0, 0)$ (это множество, очевидно, не является носителем никакой кривой, заданной параметрически в смысле п. 17.1).

3. Для уравнения

$$x^3 + y^3 - 3axy = 0 \tag{41.62}$$

условия (41.39) особой точки дают уравнения

$$x^2 - ay = 0,$$

$$y^2 - ax = 0,$$

откуда либо $x = y = 0$ и эта точка удовлетворяет уравнению (41.62), либо $x = a$, $y = a$, но эта точка не является корнем уравнения (41.62). Снова здесь $(0, 0)$ — единственная особая точка. Нетрудно убедиться, что при этом выполняются условия (41.42), и, значит, точка $(0, 0)$ является двойной точкой.

Геометрически для кривой, неявным представлением которой является уравнение (41.62) (она называется декартов лист, и мы

с ней уже встречались в п. 15.3); точка (0, 0) является *точкой самопересечения* или *двойной точкой* (см. рис. 49 в первом томе).

4. Для уравнения

$$y^2 - x^3 = 0 \tag{41.63}$$

точка (0, 0) является особой точкой; в этой точке выполняется уже условие (41.60), и тем самым в этом случае не выполняются условия теоремы 5. Геометрически кривая, выражаемая уравнением (41.63) и называемая полукубической параболой $y = \pm x^{\frac{3}{2}}$, имеет в точке (0, 0) касательную и расположена в окрестности этой точки по одну сторону от нормали.

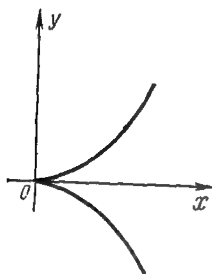


Рис. 127

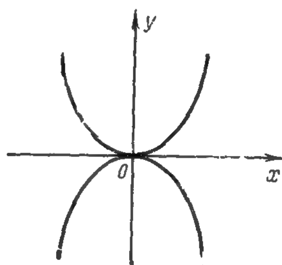


Рис. 128

Точки такого типа называются *точками возврата* (рис. 127).

5. Для уравнения

$$y^2 - x^4 = 0 \tag{41.64}$$

точка (0, 0) также является особой точкой, и снова здесь выполняется условие (41.60). Уравнение (41.64), очевидно, распадается на два уравнения: $y = x^2$ и $y = -x^2$, которые задают две параболы, имеющие в точке (0, 0) общую касательную.

Особые точки, в некоторой окрестности которых уравнение (41.37) задает две непрерывно дифференцируемые кривые, имеющие в точке (x_0, y_0) общую касательную, называются *точками самоприкосновения* (рис. 128) этих двух кривых.

Может случиться, что при выполнении условия (41.60) особая точка окажется изолированным решением уравнения (41.37) или его двойной точкой.

В заключение сделаем некоторые пояснения к уравнению (41.44). Если (x_0, y_0) — особая точка уравнения (41.37), то после параллель-

ного переноса начала координат в точку (x_0, y_0) уравнение (41.37) примет вид

$$\overline{F}^0_{xx}x^2+2\overline{F}^0_{xy}xy+\overline{F}^0_{yy}y^2+o(x^2+y^2)=0 \qquad (41.65)$$

(здесь индексом 0 наверху обозначены значения частных производных в точке (0, 0)), откуда с точностью до бесконечно малых более высокого порядка наше уравнение можно записать следующим образом:

$$\overline{F}^0_{xx}x^2+2\overline{F}^0_{xy}xy+\overline{F}^0_{yy}y^2=0. \qquad (41.66)$$

В случае выполнения условия (41.42) левая часть уравнения (41.66) распадается на два вещественных множителя, каждый из которых, приравненный нулю, и дает касательные к двум ветвям кривой в точке (0, 0) (см. доказательство теоремы 5 этого пункта). В случае же выполнения условия (41.41) левая часть уравнения (41.66) распадается на два комплексных множителя: «касательные мнимы». Это естественно, так как здесь говорить о касательной не имеет смысла, ибо в этом случае особая точка является изолированной точкой.

Это замечание особенно удобно использовать для определения характера особой точки в случае алгебраической кривой, т. е. кривой, заданной уравнением

$$P(x, y)=0, \qquad (41.67)$$

где $P(x, y)$ — многочлен от двух переменных x и y. Если (0, 0) — особая точка этого уравнения, то из условий (41.38) и (41.39) следует, что этот многочлен не содержит ни свободного члена, ни членов первого порядка, т. е. уравнение (41.67) имеет вид

$$ax^2+2bxy+cy^2+Q(x, y)=0,$$

где $Q(x, y)$—многочлен, все члены которого по крайней мере третьего порядка. Характер поведения решений этого уравнения определяется его главной частью, т. е. уравнением

$$ax^2+2bxy+cy^2=0,$$

которое является уравнением (41.66) для данного случая, ибо, как легко видеть, здесь

$$a=\overline{F}^0_{xx},\quad b=\overline{F}^0_{xy}\quad \text{и}\quad c=\overline{F}^0_{yy}.$$

Если же точка (0, 0) удовлетворяет уравнению (41.67), но не является особой, то уравнение (41.67) имеет вид

$$Ax+By+R(x, y)=0,\ A^2+B^2>0,$$

где $R(x, y)$ — многочлен, все члены которого имеют порядок не ниже второго. Из теоремы о неявных функциях (см. свойство VI в теореме 1 п. 41.1) следует, что уравнение

$$Ax+By=0$$

является в этом случае уравнением касательной в точке $(0, 0)$ к графику решения уравнения (41.67).

41.7. Замена переменных

Часто в различных вопросах математического анализа и его приложениях при изучении той или иной формулы, содержащей какие-либо функции и их производные (обыкновенные или частные), оказывается целесообразным перейти к другим независимым переменным, а иногда и к другим функциям, которые связаны с данными функциями определенными соотношениями. Все эти преобразования делаются на основании правил дифференцирования сложных и неявных функций. Рассмотрим примеры.

Пусть $u = u(x, y)$. Преобразуем выражения

$$A=\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2, \tag{41.68}$$

$$B=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \tag{41.69}$$

к полярным координатам r, φ. Из формул, связывающих декартовые координаты с полярными

$$x=r\cos\varphi, \quad y=r\sin\varphi, \tag{41.70}$$

находим

$$\frac{\partial x}{\partial r}=\cos\varphi,\ \frac{\partial x}{\partial\varphi}=-r\sin\varphi,\ \frac{\partial y}{\partial r}=\sin\varphi,\ \frac{\partial y}{\partial\varphi}=r\cos\varphi. \tag{41.71}$$

Применим формулы дифференцирования сложной функции:

$$\frac{\partial u}{\partial r}=\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial r}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial r}=\frac{\partial u}{\partial x}\cos\varphi+\frac{\partial u}{\partial y}\sin\varphi,$$

$$\frac{\partial u}{\partial\varphi}=\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial\varphi}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial\varphi}=-\frac{\partial u}{\partial x}r\sin\varphi+\frac{\partial u}{\partial y}r\cos\varphi,$$

разрешим получившиеся равенства относительно $\frac{\partial u}{\partial x}$ и $\frac{\partial u}{\partial y}$:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial r}\cos\varphi-\frac{\partial u}{\partial\varphi}\frac{\sin\varphi}{r}, \quad \frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial u}{\partial r}\sin\varphi+\frac{\partial u}{\partial\varphi}\frac{\cos\varphi}{r} \tag{41.72}$$

и подставим получившиеся выражения в (41.68):

$$A=\left(\frac{\partial u}{\partial r}\cos\varphi-\frac{\partial u}{\partial\varphi}\frac{\sin\varphi}{r}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial r}\sin\varphi+\frac{\partial u}{\partial\varphi}\frac{\cos\varphi}{r}\right)^2=$$

$$=\left(\frac{\partial u}{\partial r}\right)^2+\frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial u}{\partial\varphi}\right)^2.$$

Теперь перейдем к вычислению выражения (41.69). Продифференцируем формулы (41.70) сначала по x, затем по y:

$$\left.\begin{aligned}1&=\cos\varphi\frac{\partial r}{\partial x}-r\sin\varphi\frac{\partial\varphi}{\partial x},\\ 0&=\sin\varphi\frac{\partial r}{\partial x}+r\cos\varphi\frac{\partial\varphi}{\partial x},\end{aligned}\right\}\quad \left.\begin{aligned}0&=\cos\varphi\frac{\partial r}{\partial y}-r\sin\varphi\frac{\partial\varphi}{\partial y},\\ 1&=\sin\varphi\frac{\partial r}{\partial y}+r\cos\varphi\frac{\partial\varphi}{\partial y}.\end{aligned}\right\}$$

Разрешим получившиеся системы относительно $\frac{\partial r}{\partial x}$, $\frac{\partial\varphi}{\partial x}$, $\frac{\partial r}{\partial y}$ и $\frac{\partial\varphi}{\partial y}$:

$$\frac{\partial r}{\partial x}=\cos\varphi,\ \frac{\partial r}{\partial y}=\sin\varphi,\ \frac{\partial\varphi}{\partial x}=-\frac{\sin\varphi}{r},\ \frac{\partial\varphi}{\partial y}=\frac{\cos\varphi}{r}. \qquad (41.73)$$

Продифференцируем теперь формулы (41.72) по x и y; тогда, используя (41.73), получим

$$\frac{\partial^2u}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial u}{\partial r}\cos\varphi-\frac{\partial u}{\partial\varphi}\frac{\sin\varphi}{r}\right)\frac{\partial r}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\frac{\partial u}{\partial r}\cos\varphi-\frac{\partial u}{\partial\varphi}\frac{\sin\varphi}{r}\right)\frac{\partial\varphi}{\partial x}=$$

$$=\frac{\partial^2u}{\partial r^2}\cos^2\varphi-\frac{2\cos\varphi\sin\varphi}{r}\frac{\partial^2u}{\partial r\,\partial\varphi}+\frac{\sin^2\varphi}{r^2}\frac{\partial^2u}{\partial\varphi^2}+$$

$$+\frac{\sin^2\varphi}{r}\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{2\cos\varphi\sin\varphi}{r^2}\frac{\partial u}{\partial\varphi};$$

$$\frac{\partial^2u}{\partial y^2}=\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial u}{\partial r}\sin\varphi+\frac{\partial u}{\partial\varphi}\frac{\cos\varphi}{r}\right)\frac{\partial r}{\partial y}+\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\frac{\partial u}{\partial r}\sin\varphi+\frac{\partial u}{\partial\varphi}\frac{\cos\varphi}{r}\right)\frac{\partial\varphi}{\partial y}=$$

$$=\frac{\partial^2u}{\partial r^2}\sin^2\varphi+\frac{2\cos\varphi\sin\varphi}{r}\frac{\partial^2u}{\partial r\,\partial\varphi}+\frac{\cos^2\varphi}{r^2}\frac{\partial^2u}{\partial\varphi^2}+$$

$$+\frac{\cos^2\varphi}{r}\frac{\partial u}{\partial r}-\frac{2\cos\varphi\sin\varphi}{r^2}\frac{\partial u}{\partial\varphi}.$$

Подставляя получившиеся выражения в (41.69), будем иметь

$$B=\frac{\partial^2u}{\partial r^2}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2u}{\partial\varphi^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}.$$

В случае, когда в преобразуемое выражение входит не одна, а несколько производных данного порядка, удобно применять метод вычисления не производных, а дифференциалов. Например, считая

независимыми переменными x и y, найдем выражения для дифференциалов dr и $d\varphi$. Из формул (41.70) имеем

$$dx = \cos\varphi\, dr - r\sin\varphi\, d\varphi, \quad dy = \sin\varphi\, dr + r\cos\varphi\, d\varphi,$$

отсюда

$$dr = \cos\varphi\, dx + \sin\varphi\, dy, \quad d\varphi = -\frac{\sin\varphi}{r}dx + \frac{\cos\varphi}{r}dy \tag{41.74}$$

(отметим, что из этих формул также сразу получаются формулы (41.73). Для функции $u = u(x, y)$ имеем

$$du = \frac{\partial u}{\partial r}dr + \frac{\partial u}{\partial \varphi}d\varphi =$$

$$= \left(\frac{\partial u}{\partial r}\cos\varphi - \frac{\partial u}{\partial \varphi}\frac{\sin\varphi}{r}\right)dx + \left(\frac{\partial u}{\partial r}\sin\varphi + \frac{\partial u}{\partial \varphi}\frac{\cos\varphi}{r}\right)dy. \tag{41.75}$$

Коэффициенты у дифференциала du при дифференциалах dx и dy являются производными $\frac{\partial u}{\partial x}$ и $\frac{\partial u}{\partial y}$, поэтому из формулы (41.75) сразу получаются обе формулы (41.72). Найдем далее вторые дифференциалы d^2r и $d^2\varphi$ из формул (41.74):

$$d^2r = \sin\varphi\, d\varphi\, dx + \cos\varphi\, d\varphi\, dy =$$

$$= \frac{\sin^2\varphi\, dx^2 - 2\cos\varphi\sin\varphi\, dx\, dy + \cos^2\varphi\, dy^2}{r},$$

$$d^2\varphi = -\left(\frac{\cos\varphi}{r}dx + \frac{\sin\varphi}{r}dy\right)d\varphi + \left(\frac{\sin\varphi}{r^2}dx - \frac{\cos\varphi}{r^2}dy\right)dr =$$

$$= \frac{2\cos\varphi\sin\varphi\, dx^2 - 2(\cos^2\varphi - \sin^2\varphi)\, dx\, dy - 2\cos\varphi\sin\varphi\, dy^2}{r^2}.$$

Теперь для d^2u и получим

$$d^2u = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2}dr^2 + 2\frac{\partial^2 u}{\partial r\,\partial\varphi}dr\, d\varphi + \frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}d\varphi^2 + \frac{\partial u}{\partial r}d^2r +$$

$$+ \frac{\partial u}{\partial\varphi}d^2\varphi = \left(\cos^2\varphi\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} - \frac{2\cos\varphi\sin\varphi}{r}\frac{\partial^2 u}{\partial r\,\partial\varphi} + \frac{\sin^2\varphi}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2} +\right.$$

$$\left. + \frac{\sin^2\varphi}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{2\cos\varphi\sin\varphi}{r^2}\frac{\partial u}{\partial\varphi}\right)dx^2 + 2(\ldots)\, dx\, dy + (\ldots)\, dy^2.$$

Отсюда и получаются выражения для вторых производных $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}$ и $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ как соответственно коэффициенты у dx^2, $2dx\, dy$ и dy^2.

Аналогичные методы применимы, конечно, и в случае, когда производится какая-либо другая замена переменных $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$, когда имеются производные высших порядков, а также когда речь идет о функциях большего числа переменных.

§ 42. ЗАВИСИМОСТЬ ФУНКЦИЙ

42.1. Понятие зависимости функций. Необходимое условие зависимости функций

Определение 1. *Пусть на открытом множестве $G \subset E^n$ заданы непрерывно дифференцируемые функции:*

$$y_i = y_i(x),\ i = 1,\ 2, \ldots,\ m,\ x = (x_1, \ldots,\ x_n) \in G. \qquad (42.1)$$

Если существуют открытое множество D в пространстве $E^{m-1}_{y_1, \ldots, y_{m-1}}$ и непрерывно дифференцируемая на D функция $\varphi(y_1, \ldots, y_{m-1})$, такие, что $(y_1(x), \ldots, y_{m-1}(x)) \in D$ и $\varphi(y_1(x), \ldots, y_{m-1}(x)) = y_m(x), x \in G$, то функция y_m называется зависимой на множестве G от функций $y_1, \ldots, y_{m-1}$.

Определение 2. *Если среди функций системы (42.1) есть функция, зависимая от остальных на множестве G, то эта система называется зависимой на множестве G.*

Если ни одна функция системы (42.1) не зависит от остальных на множестве G, то эта система называется независимой на G.

В вопросе зависимости системы функций (42.1) фундаментальную роль играет матрица Якоби этой системы

$$\left\|\frac{\partial y_i}{\partial x_j}\right\|,\ i = 1,\ 2, \ldots,\ m;\ j = 1,\ 2, \ldots,\ n. \qquad (42.2)$$

Теорема 1. *Пусть $m \leqslant n$ и система функций (42.1) зависима на открытом множестве G, тогда в любой точке этого множества ранг матрицы Якоби (42.2)*) этой системы меньше m.*

Доказательство. По условию система функций (42.1) зависима на G, т. е. по крайней мере одна из этих функций зависит от остальных, пусть для определенности функция y_m зависит от функций $y_1, \ldots, y_{m-1}$:

$$y_m(x) = \varphi(y_1(x), \ldots,\ y_{m-1}(x)),\ \ x \in G,$$

где φ — непрерывно дифференцируемая функция от $(m - 1)$ аргументов. Отсюда

$$\frac{\partial y_m}{\partial x_j} = \sum_{i=1}^{m-1} \frac{\partial \varphi}{\partial y_i} \frac{\partial y_i}{\partial x_j} \text{ для всех } j = 1,\ 2, \ldots,\ n.$$

Эта формула показывает, что m-я строчка матрицы Якоби (42.2) в каждой точке $x \in G$ является линейной комбинацией остальных

*) Напомним, что рангом матрицы называется максимальное число ее линейно независимых строчек. Это число совпадает с максимальным порядком минора этой матрицы, не равного нулю.

строчек этой матрицы, и, значит, ранг матрицы Якоби (42.2) меньше m в каждой точке $x \in G$.

Теорема доказана.

Следствие 1. *Пусть $m=n$ и система функций* (42.1) *зависима на G, тогда ее якобиан $\frac{\partial(y_1, \ldots, y_n)}{\partial(x_1, \ldots, x_n)}$ равен нулю во всех точках множества G.*

Следствие 2. *Пусть $m \leqslant n$ и пусть ранг матрицы Якоби* (42.2) *хоть в одной точке открытого множества G равен m, тогда система* (42.1) *независима на множестве G.*

Следствие 1 получается сразу из доказанной теоремы при $m = n$. Следствие 2 легко доказывается от противного.

42.2. Достаточные условия зависимости функций

Мы сохраним в этом пункте обозначения и предположения предыдущего пункта.

Теорема 2. *Пусть $m \leqslant n$ и пусть ранг матрицы Якоби* (42.2) *в каждой точке открытого множества G не превышает числа r, а в некоторой точке $x^0 \in G$ в точности равен r, т. е. существует якобиан*

$$\left.\frac{\partial\left(y_{i_1}, \ldots, y_{i_r}\right)}{\partial\left(x_{j_1}, \ldots, x_{j_r}\right)}\right|_{x^{(0)}} \neq 0. \tag{42.3}$$

Тогда все r функций, входящие в условие (42.3), *являются независимыми функциями на множестве G и существует окрестность точки x^0, такая, что любая из оставшихся функций зависит на этой окрестности от указанных r функций.*

Доказательство. Пусть для простоты записи условие (42.3) имеет вид

$$\left.\frac{\partial(y_1, \ldots, y_r)}{\partial(x_1, \ldots, x_r)}\right|_{x^{(0)}} \neq 0 \tag{42.4}$$

(этого всегда можно добиться, перенумеровав в случае необходимости функции и аргументы системы (42.1) в нужном порядке). Согласно следствию 2 из теоремы 1 п. 42.1, функции $y_1, \ldots, y_r$ независимы в G.

Покажем, что каждая из остальных зависит от них в некоторой окрестности точки $x^{(0)}$. Пусть $y_i^{(0)} = y_i\left(x^{(0)}\right)$, $i = 1, 2, \ldots, m$. Рассмотрим систему первых r функций системы (42.1):

$$\begin{aligned} y_1 &= y_1(x_1, \ldots, x_n), \\ &\ldots\ldots\ldots \\ y_r &= y_r(x_1, \ldots, x_n). \end{aligned} \tag{42.5}$$

В силу условия (42.4) и теоремы о неявных функциях (см. п. 41.3) система (42.5) в некоторой окрестности точки $x^{(0)}$ может быть разрешена относительно переменных $x_1, \ldots, x_r$:

$$\begin{aligned} x_1 &= f_1(y_1, \ldots, y_r, x_{r+1}, \ldots, x_n), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_r &= f_r(y_1, \ldots, y_r, x_{r+1}, \ldots, x_n), \end{aligned} \tag{42.6}$$

при этом функции $f_1, \ldots, f_r$ определены в некоторой окрестности точки $z^{(0)} = \left(y_1^{(0)}, \ldots, y_r^{(0)}, x_{r+1}^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)}\right)$.

Рассмотрим суперпозицию функций (42.6) и функции y_{r+1}, т. е. подставим выражения (42.6) в выражение для функции y_{r+1} (см. (42.1):

$$y_{r+1} = y_{r+1}(f_1, \ldots, f_r, x_{r+1}, \ldots, x_n). \tag{42.7}$$

Эта сложная функция определена в некоторой окрестности точки $z^{(0)}$.

Покажем, что на самом деле функция (42.7) в некоторой окрестности точки $z^{(0)}$ не зависит от переменных $x_{r+1}, \ldots, x_n$, а является лишь функцией переменных $y_1, \ldots, y_r$. Для этого достаточно показать, что (см. п. 20.4) в некоторой окрестности точки $z^{(0)}$

$$\frac{\partial y_{r+1}}{\partial x_j} = 0, \quad j = r+1, \ldots, n. \tag{42.8}$$

Для этого зафиксируем одно из указанных j и рассмотрим отображение окрестности точки $\left(y_1^{(0)}, \ldots, y_r^{(0)}, x_j^{(0)}\right)$, задаваемое формулами

$$\begin{gathered} y_1 = y_1, \\ \ldots \\ y_r = y_r, \\ y_{r+1} = y_{r+1}(f_1, \ldots, f_r, x_{r+1}, \ldots, x_n), \\ x_k = x_k^{(0)}, \quad k = r+1, \ldots, n, \quad k \neq j. \end{gathered}$$

Это отображение непрерывно дифференцируемо, его матрица Якоби имеет вид

$$\left\| \begin{matrix} 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \ldots & 1 & 0 \\ \frac{\partial y_{r+1}}{\partial y_1} & \frac{\partial y_{r+1}}{\partial y_2} & \ldots & \frac{\partial y_{r+1}}{\partial y_r} & \frac{\partial y_{r+1}}{\partial x_j} \end{matrix} \right\| \tag{42.9}$$

и в некоторой окрестности точки $(y_1^{(0)}, \dots, y_r^{(0)}, x_j^{(0)})$ его можно разложить в суперпозицию отображения (см. (42.1))

$$\begin{gathered} y_1 = y_1(x_1, \dots, x_n), \\ \dots\dots\dots \\ y_r = y_r(x_1, \dots, x_n), \\ y_{r+1} = y_{r+1}(x_1, \dots, x_n), \\ x_k = x_k^{(0)}, \ k = r+1, \dots, n, \ k \neq j \end{gathered}$$

и отображения (см. (42.6))

$$\begin{gathered} x_1 = f_1(y_1, \dots, y_r, x_{r+1}, \dots, x_n), \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ x_r = f_r(y_1, \dots, y_r, x_{r+1}, \dots, x_n), \\ x_j = x_j, \\ x_k = x_k^{(0)}, \ k = r+1, \dots, n, \ k \neq j. \end{gathered}$$

Первое из этих отображений непрерывно дифференцируемо в некоторой окрестности точки $(x_1^{(0)}, \dots, x_r^{(0)}, x_j^{(0)})$, а второе непрерывно дифференцируемо в некоторой окрестности точки $(y_1^{(0)}, \dots, y_r^{(0)}, x_j^{(0)})$. Поэтому из (42.9) и из свойств якобианов отображений (см. п. 41.4) имеем

$$\frac{\partial y_{r+1}}{\partial x_j} = \frac{\partial(y_1, \dots, y_r, y_{r+1})}{\partial(y_1, \dots, y_r, x_j)} = \frac{\partial(y_1, \dots, y_r, y_{r+1})}{\partial(x_1, \dots, x_r, x_j)} \frac{\partial(x_1, \dots, x_r, x_j)}{\partial(y_1, \dots, y_r, x_j)}, \quad (42.10)$$

В силу условия теоремы ранг матрицы Якоби на множестве G меньше или равен r, следовательно,

$$\frac{\partial(y_1, \dots, y_r, y_{r+1})}{\partial(x_1, \dots, x_r, x_j)} = 0$$

всюду на G. Поэтому из (42.10) сразу следует (42.8), и потому функция (42.7) не зависит от переменных $x_{r+1}, \dots, x_n$, т. е. в некоторой окрестности O_y точки $(y_1^{(0)}, \dots, y_r^{(0)})$ она имеет вид

$$y_{r+1} = \varphi(y_1, \dots, y_r),$$

а это и означает зависимость функции y_{r+1} от функций $y_1, \dots, y_r$ в соответствующей окрестности точки $x^{(0)}$ (эта окрестность легко подбирается по окрестности O_y в силу непрерывности функций системы (42.1), см. п. 41.4).

Аналогично доказывается и зависимость каждой из функций $y_{r+2}, \dots, y_m$ от функций $y_1, \dots, y_r$ в некоторой окрестности точки $x^{(0)}$.

Пример. Рассмотрим систему функций

$$u = \sin(x+y),$$
$$v = \cos(x+y). \qquad (42.11)$$

Якобиан этой системы равен нулю на всей плоскости

$$\begin{vmatrix} \cos(x+y) & \cos(x+y) \\ -\sin(x+y) & -\sin(x+y) \end{vmatrix} = 0,$$

и, как легко видеть, ранг матрицы Якоби этой системы равен единице во всех точках плоскости.

Согласно теореме 2, функции (42.11) зависимы в окрестности каждой точки плоскости. В данном случае зависимость функций легко находится в явном виде, она может быть, например, задана формулами

$$v = \pm\sqrt{1-u^2}.$$

§ 43. УСЛОВНЫЙ ЭКСТРЕМУМ

43.1. Понятие условного экстремума

Пусть на открытом множестве $G \subset E^n$ заданы функции

$$y_i = \varphi_i(x),\ i = 1, 2, \ldots, m, \qquad (43.1)$$

$x = (x_1, \ldots, x_n) \in G$. Обозначим через E множество точек $x \in G$, в которых все функции φ_i, $i = 1, 2, \ldots, m$, обращаются в нуль:

$$E = \{x = (x_i) : x \in G,\ \varphi_i(x) = 0,\ i = 1, \ldots, m\}. \qquad (43.2)$$

Уравнения

$$\varphi_i(x) = 0,\ i = 1, 2, \ldots, m, \qquad (43.3)$$

будем называть *уравнениями связи*.

Определение 1*. Пусть на G задана функция $y = f(x)$. Точка $x^{(0)} \in E$ называется точкой условного экстремума функции $f(x)$ относительно (или при выполнении) уравнений связи* (43.3), *если она является точкой обычного экстремума этой функции, рассматриваемой только на множестве E* (см. п. 40.1).

Иначе говоря, здесь значение функции $f(x)$ в точке $x^{(0)}$ сравнивается не со всеми ее значениями в достаточно малой окрестности этой точки, а только со значениями в точках, принадлежащих достаточно малой окрестности и множеству E. Как и в случае обычных экстремумов можно, естественно, рассматривать точки просто условного экстремума и точки строго условного экстремума.

Рассмотрим, например, функцию

$$f(x, y) = x^2 + y^2 \qquad (43.4)$$

и уравнение связи

$$x + y - 1 = 0. \tag{43.5}$$

Найдем условный экстремум функции (43.4) при выполнении уравнения связи (43.5). Из (43.5) имеем $y = 1 - x$,

$$f(x, 1 - x) = 2x^2 - 2x + 1.$$

Таким образом, при выполнении условия связи функция (43.4) является функцией одного переменного, ее экстремум находится элементарно: приравнивая нулю ее производную (необходимое условие экстремума), получим $2x - 1 = 0$, откуда $x = \frac{1}{2}$. В этой точке функция (43.6), очевидно, имеет минимум (она является многочленом второй степени с положительным коэффициентом при старшем члене). Значению $x = \frac{1}{2}$ согласно уравнению связи (43.5) соответствует $y = \frac{1}{2}$.

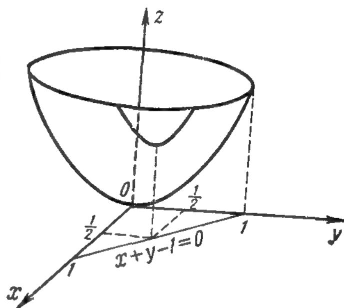


Рис. 129

Следовательно, в точке $\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$ функция (43.4) достигает минимума относительно уравнения связи (43.5). Геометрически это означает, что точка параболоида $z = x^2 + y^2$, находящаяся над точкой $\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$, является самой низкой из всех его точек, лежащих над прямой (43.5) (рис. 129).

В дальнейшем будем предполагать, что:

1) функции $f(x)$ и $\varphi_i(x)$ имеют непрерывные частные производные первого порядка на открытом множестве G;

2) $m \leqslant n$ и ранг матрицы $\left\| \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j} \right\| i = 1, 2, \ldots, m, \ j = 1, 2, \ldots, n,$

в каждой точке множества G равен m, т. е. числу строк.

Согласно результатам предыдущего параграфа, это означает, что функции системы (43.1) независимы в любой окрестности каждой точки $x \in G$.

Пусть $x^{(0)} \in G$; согласно условию 2, в точке $x^{(0)}$ хоть один из определителей вида

$$\frac{\partial(\varphi_1, \ldots, \varphi_m)}{\partial(x_{i_1}, \ldots, x_{i_m})}$$

отличен от нуля; пусть для определенности в точке $x^{(0)}$

$$\frac{\partial(\varphi_1, \ldots, \varphi_m)}{\partial(x_{n-m+1}, \ldots, x_n)} \neq 0. \tag{43.6}$$

Тогда в силу теоремы о неявных функциях (см. п. 41.3) систему уравнений (43.3) в некоторой окрестности точки $x^{(0)} = (x_1^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)})$ можно разрешить относительно переменных $x_{n-m+1}, \ldots, x_n$:

$$\begin{aligned} x_{n-m+1} &= \psi_1(x_1, \ldots, x_{n-m}), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n &= \psi_m(x_1, \ldots, x_{n-m}). \end{aligned} \tag{43.7}$$

Подставляя (43.7) в функцию $y = f(x)$, получим функцию

$$y = f(x_1, \ldots, x_{n-m}, \psi_1, \ldots, \psi_m) = g(x_1, \ldots, x_{n-m}) \tag{43.8}$$

от переменных $x_1, \ldots, x_{n-m}$, определенную и непрерывно дифференцируемую в некоторой окрестности точки $\widetilde{x}^{(0)} = (x_1^{(0)}, \ldots, x_{n-m}^{(0)})$.

Точка $x^{(0)}$ является точкой (строгого) условного экстремума для функции $f(x)$ относительно уравнения связи (43.3) *в том и только том случае, когда точка $\widetilde{x^{(0)}}$ является точкой обычного (строгого) экстремума для функции* (43.8). Это непосредственно следует из того, что условия (43.3) и (43.7) равносильны.

Таким образом, этот метод, основанный на разрешимости системы уравнений (43.3), позволяет вопрос об исследовании условного экстремума свести к уже изученному вопросу об обычном экстремуме. Именно таким образом мы и поступили в рассмотренном выше примере. Однако часто на практике решение системы (43.3) оказывается в явном виде невозможным или весьма затруднительным, поэтому в следующем пункте мы рассмотрим иной путь исследования точек условного экстремума.

43.2. Метод множителей Лагранжа для нахождения точек условного экстремума

В этом пункте мы предполагаем выполненными все предположения, сделанные в пункте (43.1) относительно функций $f(x)$ и $\varphi_i(x)$, $i = 1, 2, \ldots, m$.

Теорема 1. *Пусть точка $x^{(0)}$ является точкой условного экстремума функции $f(x)$ при выполнении уравнений связи* (43.3). *Тогда существуют такие числа $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$, что в точке $x^{(0)}$ выполняются условия*

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} + \lambda_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_i} + \ldots + \lambda_m \frac{\partial \varphi_m}{\partial x_i} = 0, \; i = 1, 2, \ldots, n. \tag{43.9}$$

Следствие. *Положим*

$$\Phi(x) = f(x) + \lambda_1 \varphi_1(x) + \ldots + \lambda_m \varphi_m(x), \tag{43.10}$$

где λ_i, $i=1, 2, \ldots, m$ — числа, указанные в теореме. Функция (43.10) *называется функцией Лагранжа. Если точка $x^{(0)}$ является точкой условного экстремума для функции $f(x)$, то она является стационарной точкой для функции Лагранжа, т. е. в этой точке*

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x_i}=0, \quad i=1, 2, \ldots, n. \tag{43.11}$$

Прежде чем доказать теорему, разъясним несколько ее смысл и метод ее использования для нахождения точек условного экстремума. Прежде всего обратим внимание на то, что у функции вида (43.10) при произвольных числах $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ каждая точка ее условного экстремума является и точкой условного экстремума для исходной функции f, и наоборот. Мы выбираем такие значения $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, чтобы выполнялись условия (43.11), т. е. чтобы данная точка условного экстремума оказалась и стационарной точкой функции (43.10).

Для отыскания точек условного экстремума следует рассмотреть систему $n+m$ уравнений (43.3) и (43.9) относительно неизвестных $x_1^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)}, \lambda_1, \ldots, \lambda_m$ и решить ее (если это окажется возможным), найдя $x_1^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)}$ и по возможности исключив $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$. Сформулированная теорема утверждает, что все точки условного экстремума будут находиться среди найденных таким образом точек $(x_1^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)})$. Вопрос о том, какие же из них фактически будут точками условного экстремума, требует дополнительного исследования; соображения на этот счет будут высказаны в следующем пункте.

Доказательство теоремы. Пусть $x^{(0)}=(x_1^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)})$ — точка условного экстремума для функции f и пусть в этой точке для определенности выполняется условие (43.6). Тогда, как мы видели, точка $\widetilde{x}^{(0)}=(x_1^{(0)}, \ldots, x_{n-m}^{(0)})$ (см. п. 43.1) является точкой обычного экстремума для функции g (см. (43.8), поэтому (см. п. 40.1) в точке $x^{(0)}$

$$dg(x_1, \ldots, x_{n-m})=0$$

или

$$df(x_1, \ldots, x_{n-m}, \psi_1, \ldots, \psi_m)=0,$$

откуда, пользуясь инвариантностью формы первого дифференциала (см. п. 37.4), для точки $\widetilde{x}^{(0)}$ имеем

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}dx_1+\ldots+\frac{\partial f}{\partial x_n}dx_n=0. \tag{43.12}$$

Подставляя (43.7) в (43.3) и дифференцируя получившееся тождество в некоторой окрестности точки $\widetilde{x}^{(0)}$, а значит, и в самой точке $\widetilde{x}^{(0)}$, получим

$$\frac{\partial \varphi_i}{\partial x_1} dx_1 + \ldots + \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_n} dx_n = 0, i = 1, 2, \ldots, m. \tag{43.13}$$

В формуле (43.13), так же как и в формуле (43.12), дифференциалы $dx_1, \ldots, dx_{n-m}$ суть дифференциалы независимых переменных, а дифференциалы $dx_{n-m+1}, \ldots, dx_n$ суть дифференциалы функций $\psi_1, \ldots, \psi_m$ [см. (43.7)].

Каковы бы ни были числа $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$, умножая равенство (43.13) в точке $\tilde{x}^{(0)}$ для функции φ_i на λ_i, $i = 1, 2, \ldots, m$, и складывая их между собой и с равенством (43.12), получим

$$\sum_{j=1}^{n} \left(\frac{\partial f}{\partial x_j} + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j} \right) dx_j = 0. \tag{43.14}$$

Выберем теперь $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ так, чтобы в точке $x^{(0)}$ выполнялись равенства

$$\frac{\partial f}{\partial x_j} + \sum_{j=1}^{m} \lambda_i \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j} = 0, \quad j = n-m+1, \ldots, n. \tag{43.15}$$

Это всегда возможно, так как (43.15) является системой m линейных относительно $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ уравнений с определителем

$$\det \left\| \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j} \right\|_{x = x^{(0)}} (i = 1, 2, \ldots, m; \ j = n-m+1, \ldots, n),$$

не равным нулю (см. 43.6).

При таком выборе $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ [из (43.14)] имеем

$$\sum_{j=1}^{n-m} \left(\frac{\partial f}{\partial x_j} + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j} \right) dx_j = 0. \tag{43.16}$$

Здесь уже все дифференциалы $dx_1, \ldots, dx_{n-m}$ суть дифференциалы независимых переменных и, значит, сами являются независимыми переменными, которые могут принимать любые значения (см. п. 37.2). Беря $dx_k = 1$, $k = 1, 2, \ldots, n-m$, а все остальные дифференциалы, входящие в формулу (43.16), равными нулю, получим

$$\frac{\partial f}{\partial x_k} + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_k} = 0, \ k = 1, 2, \ldots, n-m. \tag{43.17}$$

Мы доказали существование таких $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$, что выполняются условия (43.15) и (43.17), т. е. условия (43.9).

Теорема доказана.

Упражнение 1. Доказать, что в предположениях теоремы этого пункта выполнение условий (43.9) является достаточным для того, чтобы точка $x^{(0)}$ являлась стационарной точкой для функции $g(x_1, \ldots, x_{n-m})$ (см. (43.8)). (В процессе доказательства теоремы настоящего пункта мы доказали необходимость условия (43.9) для стационарности точки $x^{(0)}$.)

43.3. Замечания о достаточных условиях для точек условного экстремума

В этом пункте также будем предполагать выполненными все предположения, наложенные на функции f и φ_i, $i = 1, 2, \ldots, m$, в п. 43.1.

Пусть

$$\Phi = f + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \varphi_i$$

функция Лагранжа (см. (43.10)) для функции f и уравнений связи (43.3).

Пусть точка $x^{(0)} \in G$ удовлетворяет уравнениям связи (43.3) и является стационарной точкой функции Лагранжа, т. е. точкой, которая может быть найдена решением системы уравнений (43.9) и (43.3).

Нашей целью является получение метода, с помощью которого можно будет установить достаточные условия для того, чтобы указанная точка $x^{(0)}$ являлась точкой условного экстремума рассматриваемой задачи.

Заметим прежде всего, что если точка $x \in G$ удовлетворяет уравнениям связи (43.3), то

$$\Delta f = f(x) - f(x^{(0)}) = \Phi(x) - \Phi(x^{(0)}) = \Delta\Phi. \qquad (43.18)$$

Отсюда сразу видно, что если точка $x^{(0)}$ является точкой обычного экстремума для функции Φ, т. е. $\Delta\Phi$ не меняет знака в некоторой окрестности точки $x^{(0)}$, то точка $x^{(0)}$ является точкой условного экстремума для функции f.

Действительно, из (43.18) следует в этом случае, что приращение Δf для допустимых значений x, т. е. удовлетворяющих уравнениям связи, также не меняет знака. Это достаточное условие условного экстремума, однако, не достаточно общее, и его не хватает для исследования многих задач. Поэтому продолжим изучение разности Δf. Для этого разложим функцию Φ в окрестности указанной точки $x^{(0)}$ по формуле Тейлора, беря члены до второго порядка включительно. В силу стационарности точки $x^{(0)}$ [см. (43.11)] получим (см. п. 39.1)

$$\Delta\Phi = \frac{1}{2} d^2\Phi(x^{(0)}) + \sum_{i,j=1}^{n} \varepsilon_{ij}(\Delta x)\, \Delta x_i\, \Delta x_j =$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{i,\, j=1}^{n} \frac{\partial^2 \Phi(x^{(0)})}{\partial x_i \partial x_j} \Delta x_i \Delta x_j + \sum_{i,\, j=1}^{n} \varepsilon_{ij}(\Delta x) \Delta x_i \Delta x_j; \quad (43.19)$$

где, как обычно,

$$\Delta x = (\Delta x_1, \ldots, \Delta x_n), \ \rho = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \Delta x_i^2},$$

$$\lim_{\rho \to 0} \varepsilon_{ij}(\Delta x) = 0, \ x = x^{(0)} + \Delta x = \left(x_1^{(0)} + \Delta x_1, \ldots, x_n^{(0)} + \Delta x_n\right).$$

Формула (43.19) справедлива для любой точки x некоторой окрестности точки $x^{(0)}$. Нас же интересуют только те из этих точек, которые удовлетворяют уравнениям связи (43.3) или, что то же, условиям (43.7). В силу этого приращения Δx_i в формуле (43.19) не являются независимыми, а связаны между собой соотношениями (43.13).

Из формулы (43.7) имеем

$$\Delta x_i = dx_i + \sum_{k=1}^{n-m} \tilde{\varepsilon}_{ik}(\widetilde{dx})\, dx_k, \ i = n-m+1, \ldots, n, \quad (43.20)$$

$$\Delta x_k = dx_k, \ k = 1, 2, \ldots, n-m, \quad (43.21)$$

где

$$\widetilde{dx} = (dx_1, \ldots, dx_{n-m}), \ \tilde{\rho} = \sqrt{\sum_{k=1}^{n-m} dx_k^2} \ \text{и} \ \lim_{\tilde{\rho} \to 0} \tilde{\varepsilon}_{ik}(dx) = 0.$$

Для удобства и единообразия выкладок будем считать, что формулы (43.21) также записаны в виде (43.20) при $\tilde{\varepsilon}_{ik}(\widetilde{dx}) = 0$, $i = 1, 2, \ldots, n-m$.

Для точек, удовлетворяющих уравнениям связи, дифференциалы зависимых и независимых переменных связаны в точке $x^{(0)}$ соотношениями (43.13), которые в силу условия (43.6) могут быть разрешены относительно дифференциалов $dx_{n-m+1}, \ldots, dx_n$ (как система линейных уравнений, определитель из коэффициентов которой отличен от нуля); в результате получим выражения вида

$$dx_i = \sum_{k=1}^{n-m} a_{ik}\, dx_k, \ i = n-m+1, \ldots, n, \quad (43.22)$$

где a_{ik} — некоторые числа. Для единообразия вычислений нам удобно считать, что dx_i, $i = 1, 2, \ldots, n-m$, также записаны в виде (43.22): в этом случае, очевидно, $a_{ii} = 1$, $a_{ik} = 0$ при $i \neq k$.

Подставляя (43.20), (43.21) и (43.22) в (43.19), в некоторой окрестности точки $x^{(0)}$ для любой точки x, удовлетворяющей уравнениям связи, получим

$$\Delta\Phi = \frac{1}{2} \sum_{i,\, j=1}^{n} \frac{\partial^2 \Phi(x^{(0)})}{\partial x_i \partial x_j} dx_i\, dx_j +$$

$$+ \sum_{i,\, j=1}^{n} \frac{\partial^2 \Phi(x^{(0)})}{\partial x_i \partial x_j} \sum_{k=1}^{n-m} a_{ik}\, dx_k \sum_{l=1}^{n-m} \tilde{\varepsilon}_{jl}\, dx_l +$$

$$+\frac{1}{2}\sum_{i,\,j=1}^{n}\frac{\partial^2\Phi(x^{(0)})}{\partial x_i\,\partial x_j}\sum_{k=1}^{n-m}\tilde{\varepsilon}_{ik}\,dx_k\sum_{l=1}^{n-m}\tilde{\varepsilon}_{jl}\,dx_l+$$

$$+\sum_{i,\,j=1}^{n}\varepsilon_{ij}\left(\sum_{k=1}^{n-m}a_{ik}\,dx_k+\sum_{k=1}^{n-m}\tilde{\varepsilon}_{ik}\,dx_k\right)\left(\sum_{l=1}^{n-m}a_{jl}\,dx_l+\sum_{l=1}^{n-m}\varepsilon_{jl}\,dx_l\right). \quad (43.23)$$

Но при $\tilde{\rho}\to 0$ имеем $\Delta x_i\to 0$, $i=n-m+1, \ldots, n$; это, например, сразу видно из формул (43.20), поэтому при $\tilde{\rho}\to 0$ и $\rho\to 0$, а потому $\lim\limits_{\tilde{\rho}\to 0}\varepsilon_{ij}(\Delta x)=0$, если только точка удовлетворяет уравнениям связи. Поэтому равенство (43.23) можно записать в виде

$$\Delta\Phi=\frac{1}{2}\sum_{i,\,j=1}^{n}\frac{\partial^2\Phi(x^{(0)})}{\partial x_i\,\partial x_j}\,dx_i\,dx_j+\sum_{k,\,l=1}^{n-m}\varepsilon_{kl}^{*}\,dx_k\,dx_l, \quad (43.24)$$

где $\lim\limits_{\tilde{\rho}\to 0}\varepsilon_{kl}^{*}=0$, т. е. получено выражение того же типа, что и (43.19), только вместо зависимых приращений $\Delta x_1, \ldots, \Delta x_n$, здесь стоят дифференциалы $dx_1, \ldots, dx_n$, связанные соотношениями (43.13).

Замечая теперь, что (срав. п. 39.1)

$$\sum_{k,\,l=1}^{n-m}\varepsilon_{kl}^{*}\,dx_k\,dx_l=\varepsilon\tilde{\rho}^2,$$

где $\lim\limits_{\tilde{\rho}\to 0}\varepsilon=0$ и, как и выше $\tilde{\rho}=\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n-m}dx_i^2}$. Из (43.24) и (43.18) получаем окончательно

$$\Delta f=f(x)-f(x^{(0)})=\frac{1}{2}\sum_{i,\,j=1}^{n}\frac{\partial^2\Phi(x^{(0)})}{\partial x_i\,\partial x_j}\,dx_i\,dx_j+o(\tilde{\rho}^2), \quad (43.25)$$

где дифференциалы dx_i, $i=1, 2, \ldots, n$, связаны соотношением (43. 3).

Если из этих соотношений выразить дифференциалы зависимых переменных dx_j, $j=n-m+1, \ldots, n$, через дифференциалы независимых переменных dx_k, $k=1, 2, \ldots, n-m$ (см. 43.22), то получим выражение вида

$$\Delta f=\sum_{i,\,j=1}^{n-m}b_{ij}\,dx_i dx_j+o(\tilde{\rho}^2),\ \tilde{\rho}\to 0. \quad (43.26)$$

Отсюда (совершенно аналогично случаю обычного экстремума, см. п. 40.2) следует, что *если квадратичная форма*

$$B(dx_1, \ldots, dx_{n-m})=\sum_{i,\,j=1}^{n-m}b_{ij}\,dx_i\,dx_j \quad (43.27)$$

определенная, то в точке $x^{(0)}$ *будет строгий условный экстремум, а именно строгий условный максимум, если квадратичная форма* (43.27) *отрицательно определенная, и строгий условный минимум, если квадратичная форма* (43.27) *положительно определенная. Если же квадратичная форма* (43.27) *неопределенная, то точка* $x^{(0)}$ *не является точкой условного экстремума.*

Резюмируем кратко все сказанное в этом пункте. Для того чтобы исследовать стационарную точку функции Лагранжа (43.10), на условный экстремум надо исследовать на определенность квадратичную форму (43.27), т. е. второй дифференциал функции Лагранжа в этой точке при выполнении условий связи (43.3) (когда дифференциалы dx_i, $i = 1, 2, \ldots, n$, связаны соотношениями (43.13)).

Пусть, например, требуется найти точки экстремума функции $f(x, y) = xy$, когда точка (x, y) лежит на прямой $x - y = 0$. Функцией Лагранжа в данном случае является функция вида $\Phi(x, y) = xy - \lambda(x - y)$, и так как $\frac{\partial \Phi}{\partial x} = y - \lambda$, $\frac{\partial \Phi}{\partial y} = x + \lambda$, то для определения стационарных точек функции $\Phi(x, y)$, удовлетворяющих условиям связи, имеем следующие уравнения:

$$x - y = 0,$$
$$y - \lambda = 0,$$
$$x + \lambda = 0,$$

из которых следует $x = y = \lambda = 0$. Исследуем в точке (0, 0) второй дифференциал функции $\Phi(x, y)$ при выполнении условий связи, т. е. когда $dx - dy = 0$. Имеем

$$d^2\Phi = 2dx\,dy, \tag{43.28}$$

и, значит, при выполнении условий связи

$$d^2\Phi = dx^2 \geqslant 0, \tag{43.29}$$

т. е. второй дифференциал (43.28), являясь неопределенной квадратичной формой, при выполнении условий связи превращается в положительно определенную квадратичную форму (43.29). Поэтому точка (0, 0) является точкой строгого условного минимума для рассмотренной задачи. Впрочем в данном случае это легко усмотреть и сразу: вдоль прямой $x - y = 0$ функция $f(x, y) = xy$ имеет вид $f(x, x) = x^2$, которая, очевидно, имеет в точке $x = 0$ строгий минимум.

Упражнение 2. Найти точки условного экстремума функций при указанных условиях.

1. $z = \frac{x}{a} + \frac{y}{b}$, $x^2 + y^2 = 1$.

2. $z = x^2 + y^2$, $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$.

3. $u = xyz$, $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, $x + y + z = 0$.

ГЛАВА ШЕСТАЯ

ИНТЕГРАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИЙ МНОГИХ ПЕРЕМЕННЫХ

§ 44. КРАТНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

44.1. Понятие объема в n-мерном пространстве. Множества меры нуль

Напомним кратко основные определения, связанные с понятием n-мерного объема (площади, в случае $n = 2$) множеств в n-мерном пространстве, дополнив их некоторыми сведениями, необходимыми для построения теории кратных интегралов.

Пусть E^n — n-мерное евклидово пространство ($n = 1, 2, \ldots$). Его точки, как обычно, будем обозначать $x = (x_1, \ldots, x_n)$, где x_i, $i = 1, 2, \ldots, n$, — координаты точки x в некоторой раз и навсегда фиксированной системе координат. Обозначим через T_k, $k = 0, 1, \ldots$, совокупность всех замкнутых кубов вида

$$Q^n = \left\{x : \frac{m_i}{10^k} \leqslant x_i \leqslant \frac{m_i + 1}{10^k},\ i = 1, 2, \ldots, n\right\}, \tag{44.1}$$

где m_i — целые числа. T_k называется *разбиением ранга* k пространства E^n. Кубы Q^n, принадлежащие разбиению T_k, называются *кубами ранга* k (в случае $n=1$ Q^n является, очевидно, отрезком, а в случае $n = 2$ — квадратом).

В дальнейшем одномерный случай нас не будет интересовать, поэтому (чтобы не усложнять терминологию) будем предполагать, что $n \geqslant 2$, хотя все сказанное ниже является справедливым и для $n = 1$.

Назовем число $\frac{1}{10^{kn}}$ n-мерным объемом куба (44.1) и обозначим его $\operatorname{mes} Q^n$:

$$\operatorname{mes} Q^n = \frac{1}{10^{kn}};$$

n-мерный объем $\operatorname{mes} E$ множества E, представляющего собой объединение конечного, или счетного, числа различных кубов Q_i^n данного ранга k ($i = 1, 2, \ldots$), определим равенством

$$\operatorname{mes} E = \sum_i \operatorname{mes} Q_i^n. \qquad (44.2)$$

Пусть G — открытое множество в E^n. Обозначим через $S_k = S_k(G)$, $k = 0, 1, \ldots$, множество точек всех n-мерных кубов ранга k, целиком лежащих в G. Тогда

$$S_0 \subset S_1 \subset \ldots \subset S_k \subset S_{k+1} \subset \ldots$$

и следовательно,

$$\operatorname{mes} S_0 \leqslant \operatorname{mes} S_1 \leqslant \ldots \leqslant \operatorname{mes} S_k \leqslant \operatorname{mes} S_{k+1} \leqslant \ldots,$$

поэтому существует конечный или бесконечный предел $\lim\limits_{k\to\infty} \operatorname{mes} S_k$ (сравн. с п. 31.1).

Определение 1. *Конечный или бесконечный предел* $\lim\limits_{k\to\infty} \operatorname{mes} S_k(G)$ *называется n-мерной мерой, или n-мерным объемом, множества G и обозначается* $\operatorname{mes} G$, *т. е.*

$$\operatorname{mes} G = \lim_{k\to\infty} \operatorname{mes} S_k. \qquad (44.3)$$

В силу этого определения $\operatorname{mes} G > 0$ для любого открытого множества $G \subset E^n$, а если, кроме того, G ограничено, то $\operatorname{mes} G < +\infty$.

Задача 19. Доказать, что мера открытого множества не зависит от выбора системы координат.

Лемма 1. *Если открытые множества G' и G'' не имеют общих точек, то*

$$\operatorname{mes}(G' \cup G'') = \operatorname{mes} G' + \operatorname{mes} G''. \qquad (44.4)$$

Доказательство. Пусть $G = G' \cup G''$ и пусть $S_k = S_k(G)$, $S_k' = S_k(G')$ и $S_k'' = S_k(G'')$. Из того, что множества G' и G'' не пересекаются, следует, что и множества S_k' и S_k'' не пересекаются. Очевидно, $S_k = S_k' \cup S_k''$, поэтому согласно определению (44.2)

$$\operatorname{mes} S_k = \operatorname{mes}(S_k' \cup S_k'') = \operatorname{mes} S_k' + \operatorname{mes} S_k''.$$

Переходя к пределу в этом равенстве, при $k \to +\infty$, мы и получим (44.4).

Свойство меры, выражаемое формулой (44.4), называется *аддитивностью меры.*

Для построения теории кратных интегралов оказывается весьма целесообразным введение понятия верхней меры множества.

Пусть $E \subset E^n$. Обозначим через $S_k^* = S_k^*(E)$, $k = 0, 1, 2, \ldots$ множество точек всех n-мерных кубов ранга k, каждый из которых

пересекается с E. Тогда

$$S_0^* \supset S_1^* \supset \ldots, \supset S_k^* \supset S_{k+1}^* \supset \ldots,$$

откуда

$$\operatorname{mes} S_0^* \geqslant \operatorname{mes} S_1^* \geqslant \ldots \geqslant \operatorname{mes} S_k^* \geqslant \operatorname{mec} S_{k+1}^* \geqslant \ldots .$$

Если множество E ограничено, то $0 \leqslant \operatorname{mes} S_k^* < +\infty$, $k = 0, 1, 2, \ldots$, а если E неограничено, то $\operatorname{mes} S_k^* = +\infty$, $k = 0, 1, 2, \ldots$ (ибо в этом случае существует бесконечно много кубов любого фиксированного ранга, пересекающихся с множеством E). В обоих случаях существует $\lim\limits_{k \to \infty} \operatorname{mes} S_k^*(E)$, причем в первом случае конечный, во втором — бесконечный.

Определение 2. *Предел* $\lim\limits_{k \to \infty} \operatorname{mes} S_k^*(E)$ *называется верхней n-мерной мерой множества E (точнее, верхней n-мерной мерой Жордана) и обозначается* $\overline{\operatorname{mes}}\, E$.

Таким образом,

$$\overline{\operatorname{mes}}\; E = \lim_{k \to \infty} \operatorname{mes} S_k^*. \tag{44.5}$$

Задача 20. Доказать, что верхняя мера не зависит от выбора системы координат.

Лемма 2 (монотонность верхней меры). *Если* $D \subset E$, *то*

$$\overline{\operatorname{mes}}\, D \leqslant \overline{\operatorname{mes}}\, E.$$

Доказательство. Если $D \subset E$, то при любом $k = 0, 1, 2, \ldots$ справедливо включение

$$S_k^*(D) \subset S_k^*(E)$$

и, следовательно (см. (44.2)),

$$\operatorname{mes} S_k^*(D) \leqslant \operatorname{mes} S_k^*(E).$$

Переходя здесь к пределу при $k \to \infty$, получаем утверждение леммы.

Лемма 3. *Верхняя мера суммы конечного числа множеств не превосходит суммы их верхних мер.*

Доказательство. Пусть $E_i \subset E^n$, $i = 1, 2, \ldots, m$, и

$$E = \bigcup_{i=1}^{m} E_i,$$

тогда

$$S_k^*(E)=\bigcup_{i=1}^{m} S_k^*(E_i),\ k=0,\ 1,\ 2,\ \dots .$$

Следовательно, согласно формуле (44.2), будем иметь

$$\operatorname{mes} S_k^*(E)\leqslant \sum_{i=1}^{m}\operatorname{mes} S_k^*(E_i).$$

Переходя здесь к пределу при $k\to\infty$, получим

$$\overline{\operatorname{mes}}\,E\leqslant \sum_{i=1}^{m}\overline{\operatorname{mes}}\,E_i.$$

Лемма 3 доказана.

Определение 3. *Если $\overline{\operatorname{mes}}\,E=0$, то множество E называется множеством меры ноль (точнее, жордановой меры ноль).*

Для простоты в этом случае пишется просто $\operatorname{mes} E=0$.

Расшифровывая понятие предела (44.5) можно сказать, что множество E имеет меру ноль в том и только том случае, если для любого $\varepsilon>0$ существует такой номер k_ε, что

$$\operatorname{mes} S_{k_\varepsilon}^*<\varepsilon,$$

Очевидно, что в этом случае $\operatorname{mes} S_k^*<\varepsilon$ и для всех $k>k_\varepsilon$.

Пустое множество по определению считается множеством меры ноль.

Упражнения. 1. Доказать, что если $E\subset D\subset E^n$ и $\operatorname{mes} D=0$, то $\operatorname{mes} E=0$.

2. Доказать, что сумма конечного числа множеств жордановой меры ноль имеет меру ноль.

3. Показать, что сумма счетного множества множеств жордановой меры ноль не обязательно имеет меру ноль.

Теорема 1. *График всякой непрерывной функции, определенной на ограниченном замкнутом множестве, имеет меру ноль.*

Доказательство. Пусть функция $y=f(x)=f(x_1,\ \dots,\ x_n)$ определена и непрерывна на ограниченном замкнутом множестве $A\subset E_x^n$. Тогда существует такое натуральное m, что n-мерный куб

$$Q_m=\{x: -m\leqslant x_i\leqslant m,\ i=1,\ 2,\ \dots,\ n\}$$

содержит множество A. Тогда тем более

$$Q_{m+1}=\{x: -m-1\leqslant x\leqslant m+1\}\subset A.$$

Пусть E — график функции f, т. е. множество точек

$$(x_1,\ \dots,\ x_n,\ f(x_1,\ \dots,\ x_n)),\ (x_1,\ \dots,\ x_n)\in A$$

$(n+1)$-мерного пространства E_{xy}^{n+1} точек $(x_1,\ \dots,\ x_n,\ y)$.

Как и выше, обозначим через $S_k^*=S_k^*(E)$ множество точек всех кубов ранга k пространства E_{xy}^{n+1}, пересекающихся с E. Множество S_k^* распадается на конечное число «столбиков» $S_k^{*(i)}$,

каждый из которых состоит из указанных кубов ранга k, имеющих одну и ту же проекцию $Q^{(i)}$ в пространство E_x^n (рис. 130). Обозначим через $\omega(\delta)$ модуль непрерывности функции f. Замечая, что диаметр (диагональ) **) n-мерного куба с ребром длины $\frac{1}{10^k}$ равна $\frac{\sqrt{n}}{10^k}$, для высоты $h_k^{(i)}$ каждого столбика $S_k^{*(i)}$ имеем (см. рис. 130) следующую оценку:

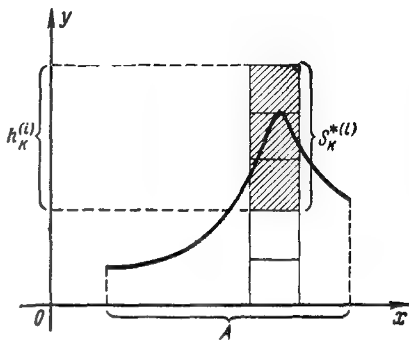


Рис. 130

$$h_k^{(i)} \leqslant \omega\left(\frac{\sqrt{n}}{10^k}\right) + \frac{2}{10^k},$$

откуда

$$\operatorname{mes} S_k^* = \sum_i \operatorname{mes} S_k^{*(i)} = \sum_i h_k^{(i)} \operatorname{mes} Q^{(i)} \leqslant$$

$$\leqslant \left[\omega\left(\frac{\sqrt{n}}{10^k}\right) + \frac{2}{10^k}\right] \sum_i \operatorname{mes} Q^{(i)} \leqslant \left[\omega\left(\frac{\sqrt{n}}{10^k}\right) + \frac{2}{10^k}\right] \operatorname{mes} Q_{m+1}. \quad (44.6)$$

В силу равномерной непрерывности функции f на множестве A

$$\lim_{k\to\infty} \omega\left(\frac{\sqrt{n}}{10^k}\right) = 0$$

и поскольку

$$\lim_{k\to\infty} \frac{2}{10^k} = 0,$$

то из (44.6) имеем

$$\lim_{k\to\infty} S_k^* = 0,$$

а это и означает, что $\overline{\operatorname{mes}}\, E = 0$.

Теорема доказана.

Представляет интерес обобщить эту теорему на случай параметрически заданных множеств, в частности, на случай параметрических кривых. Оказывается, что даже в этом последнем случае одной лишь непрерывности рассматриваемых кривых недостаточно для того,

*) Если $E \subset E_{xy}^{n+1}$, то *проекцией множества* E в пространство E_x^n называется множество всех таких точек $x = (x_1, \ldots, x_n) \in E^n$, для которых существует точка $(x_1, \ldots, x_n, y) \in E$.

**) Определение диаметра $d(E)$ множества E см. в п. 19.5.

чтобы можно было гарантировать, что они имеют меру ноль. Существуют, например, кривые

$$x_i = x_i(t), \quad a \leqslant t \leqslant b, \quad i = 1, 2, \ldots, n,$$

($x_i(t)$ — непрерывные функции)

называемые *кривыми Пеано*, которые проходят через каждую точку некоторого n-мерного куба и, следовательно, не имеют меры ноль.

Задача 21. Построить пример кривой Пеано.

Теорема 2. *Всякая спрямляемая кривая на плоскости имеет меру ноль.*

Доказательство. Пусть задана спрямляемая кривая γ и

$$r = r(s) = \begin{Bmatrix} x = x(s) \\ y = y(s) \end{Bmatrix}, \quad 0 \leqslant s \leqslant S, \tag{44.7}$$

— ее представление, где $r(s)$ — непрерывная функция, s — переменная длина дуги, S — длина кривой γ.

Разобьем отрезок $[0, S]$ на m равных частей точками

$$s_0 = 0,\ s_1, \ldots, s_{m-1}, s_m = S\,(m = 1, 2, 3, \ldots).$$

Обозначим через γ_i кривую, задаваемую вектор-функцией (44.7), рассматриваемой только на отрезке $[s_{i-1}, s_i]\,(i = 1, 2, \ldots, m)$. Длина каждой такой дуги γ_i равна $\frac{S}{m}$, и так как ее началом является точка $r(s_{i-1})$, то вся она лежит в замкнутом круге K_i (почему?) с центром в точке $r(s_{i-1})$ и радиуса $\frac{S}{m}$, поэтому

$$\gamma \subset \bigcup_{i=1}^{m} K_i.$$

Следовательно, в силу леммы 3

$$\overline{\text{mes}}\, \gamma \leqslant \sum_{i=1}^{m} \overline{\text{mes}}\, K_i. \tag{44.8}$$

Но $\overline{\text{mes}}\, K_i = \overline{\text{mes}}\, K_i = \pi \left(\frac{S}{m}\right)^{2*)}$, поэтому из (48.8)

---

*) Действительно, если K—некоторый круг, то $S_k^*(K) \setminus S_k(K)$ состоит из точек тех и только тех квадратов ранга k, которые пересекаются с окружностью C, ограничивающей круг K, т. е. $S_k^*(K) \setminus S_k(K) = S_k^*(C)$. Поскольку окружность C можно представить как объединение двух графиков непрерывных функций, то, согласно теореме 1, $\text{mes}\, C = 0$. Следовательно, $\lim\limits_{k\to\infty} \text{mes}\, S_k^*(C) = 0$, откуда $\lim\limits_{k\to\infty} \text{mes}\, S_k^*(K) = \lim\limits_{k\to\infty} \text{m s}\, S_k(K)$, т. е. $\overline{\text{mes}}\, K = \text{mes}\, K$.

имеем

$$\overline{\text{mes}}\,\gamma \leqslant \frac{\pi S^2}{m}.$$

Левая часть неравенства не зависит от m, а правая — стремится к нулю, когда $m \to \infty$, поэтому $\text{mes}\,\gamma = 0$.

Теорема доказана.

Упражнение 4. Доказать, что всякая спрямляемая кривая в трехмерном пространстве имеет меру ноль.

Определение 4. *Пусть $E \subset E_x^n$ и задано число $h > 0$. Рассмотрим $(n+1)$-мерное пространство E_{xy}^{n+1} точек $(x_1, \ldots, x_n, y)$. Множество*

$$E_h = \{(x_1, \ldots, x_n, y) : (x_1, \ldots, x_n) \in E,\ 0 \leqslant y \leqslant h\}$$

называется цилиндром с основанием E и высотой равной h.

Теорема 3. *Если $\text{mes}\,E = 0$ в E_x^n, то $\text{mes}\,E_h = 0$ в E_{xy}^{n+1}, т. е. мера цилиндра с основанием меры ноль равна нулю.*

Доказательство. Пусть $\text{mes}\,E = 0$ и пусть $S_k^* = S_k^*(E_h)$ — множество точек всех $(n+1)$-мерных кубов ранга k, пересекающихся с цилиндром E_h. Множество S_k^* распадается на конечное число «столбиков» S_{ki}^*, $i = 1, 2, \ldots, i_k$, состоящих из указанных кубов, имеющих одну и ту же проекцию Q_i в пространство E_x^n. Эта проекция Q_i является, очевидно, n-мерным кубом ранга k в пространстве E_x^n, пересекающимся с E. Обратно, всякий n-мерный куб ранга k в пространстве E_x^n, пересекающийся с множеством E, является проекцией некоторого столбика S_{ki}^*; поэтому из условия $\text{mes}\,E = 0$ имеем

$$\lim_{k \to \infty} \sum_{i=1}^{i_k} \text{mes}\,Q_i = \lim_{k \to \infty} \text{mes} \bigcup_{i=1}^{i_k} Q_i = \text{mes}\,E = 0.$$

Замечая, что

$$\text{mes}\,S_{ki}^* \leqslant \left(h + \frac{2}{10^k}\right) \text{mes}\,Q_i,$$

получим

$$\text{mes}\,S_k^* = \text{mes} \bigcup_{i=1}^{i_k} S_{ki}^* = \sum_{i=1}^{i_k} \text{mes}\,S_{ki}^* \leqslant \left(h + \frac{2}{10^k}\right) \sum_{i=1}^{i_k} \text{mes}\,Q_i,$$

откуда

$$\lim_{k \to \infty} \text{mes}\,S_k^* = 0.$$

Теорема доказана.

44.2. Квадрируемые и кубируемые множества

Пусть теперь G — ограниченное открытое множество в E^n, $\bar{G}$ — его замыкание. Обозначим через $S_k^* = S_k^*(\bar{G})$ множество точек кубов ранга k, пересекающихся с $\bar{G}$, а через $S_k = S_k(G)$ — множество точек кубов, содержащихся в G, $k = 0, 1, \ldots$. Очевидно, что $S_k \subset S_k^*$ для каждого k (рис. 131), поэтому

$$\text{mes}\, S_k \leqslant \text{mes}\, S_k^*,$$

откуда в пределе получим

$$\text{mes}\, G \leqslant \overline{\text{mes}}\, \bar{G}.$$

Рис. 131

Определение 5. *Ограниченное открытое множество $G \subset E^n$ называется кубируемым (квадрируемым в случае $n = 2$), если его мера совпадает с верхней мерой $\bar{G}$, т. е.*

$$\text{mes}\, G = \overline{\text{mes}}\, \bar{G}. \qquad (44.9)$$

Для упрощения терминологии мы в дальнейшем будем опускать замечание о том, что при $n = 2$ рассматриваемые множества называются не кубируемыми, а квадрируемыми.

Теорема 4. *Ограниченное открытое множество кубируемо тогда и только тогда, когда его граница имеет меру ноль.*

Доказательство. Обозначим через s_k множество точек кубов ранга k, каждый из которых содержится в S_k^*, но не содержится в множестве S_k. Так как $\partial G = \bar{G} \setminus G$, то s_k состоит из точек тех и только тех кубов, которые пересекаются с границей множества G (см. лемму 7 в п. 18.2), поэтому

$$\lim_{k\to\infty} s_k = \overline{\text{mes}}\, \partial G.$$

Очевидно, в силу определения (44.2)

$$\text{mes}\, s_k = \text{mes}\, S_k^* - \text{mes}\, S_k. \qquad (44.10)$$

Отсюда следует, что если условие (44.9) выполнено, т. е.

$$\lim_{k\to\infty} \text{mes}\, S_k = \lim_{k\to\infty} \text{mes}\, S_k^*, \qquad (44.11)$$

то

$$\lim_{k\to\infty} \text{mes}\, s_k = 0, \qquad (44.12)$$

т. е. $\operatorname{mes} \partial G = 0$. Обратно, если выполняется условие $\operatorname{mes} \partial G = 0$, т. е условие (44.12), то из (44.10) в силу существования пределов $\lim\limits_{k \to \infty} \operatorname{mes} S_k$ и $\lim\limits_{k \to \infty} \operatorname{mes} S_k^*$ получаем (44.11) и, следовательно, (44.9). Теорема доказана.

Упражнения. 4. Доказать, что

1) сумма конечного числа открытых кубируемых множеств также является открытым кубируемым множеством;

2) пересечение конечного числа открытых кубируемых множеств также является открытым кубируемым множеством.

Указание. Показать предварительно, что для любых двух множеств A и B пространства E^n

$$\partial (A \cup B) \subset \partial A \cup \partial B,$$
$$\partial (A \cap B) \subset \partial A \cup \partial B.$$

5. Доказать, что если G и Γ — открытые кубируемые множества $\Gamma \subset G$ и $D = G \setminus \overline{\Gamma}$, то D также открытое кубируемое множество и

$$\operatorname{mes} D = \operatorname{mes} G - \operatorname{mes} \Gamma.$$

Заметим, что в силу результатов п. 44.1 всякое открытое ограниченное множество, границу которого можно разбить на конечное число частей, каждая из которых является графиком некоторой непрерывной на ограниченном замкнутом множестве функции или цилиндром с основанием меры ноль, является кубируемым множеством.

Определение 6. *Замыкание $\overline{G}$ открытого кубируемого множества G также называется кубируемым множеством, и по определению считается, что*

$$\operatorname{mes} \overline{G} = \operatorname{mes} G. \tag{44.13}$$

Естественность этого определения следует из теоремы 4.

Упражнение 6. Доказать, что множество, состоящее из конечного числа кубов данного ранга, кубируемо и его мера в смысле обоих определений (44.2) и (44.13) одна и та же.

Задача 22. Построить пример неквадрируемой области.

44.3. Определение кратного интеграла

Определение 7. *Пусть G — кубируемое открытое множество в E^n. Система $\tau = \{G_i\}_{i=1}^{i=i_0}$ кубируемых открытых множеств G_i называется разбиением множества G, если*

1) $G_i \subset G$, $i = 1, 2, \ldots, i_0$;

2) G_i — *попарно не пересекаются*;

3) $\bigcup\limits_{i=1}^{i_0} \overline{G}_i = \overline{G}$.

Число

$$\delta_\tau = \max_i d(G_i),$$

где $d(G_i)$ — диаметр множества G_i, называется мелкостью разбиения τ.

Лемма 4. *Если $\tau=\{G_i\}_{i=1}^{i=i_0}$ является разбиением G, то*

$$\operatorname{mes} G=\sum_{i=1}^{i_0}\operatorname{mes} G_i. \tag{44.14}$$

Доказательство. Пусть S_k и S_{ki} — совокупности точек кубов ранга k, целиком лежащих в G, соответственно в G_i, а σ_k — совокупность точек кубов ранга k, пересекающихся с какой-либо из границ ∂G_i, $i=1, 2, \ldots, i_0$. Тогда

$$\bigcup_{i=1}^{i_0} S_{ki}\subset S_k\subset\sigma_k\cup\bigcup_{i=1}^{i_0} S_{ki},$$

откуда в силу определения (44.2)

$$\operatorname{mes}\bigcup_{i=1}^{i_0} S_{ki}\leqslant\operatorname{mes} S_k\leqslant\operatorname{mes}\sigma_k+\operatorname{mes}\bigcup_{i=1}^{i_0} S_{ki}. \tag{44.15}$$

Множества G_i, $i=1, 2, \ldots, i_0$, а значит, и S_{ki} (k фиксированно) не пересекаются, поэтому

$$\operatorname{mes}\bigcup_{i=1}^{i_0} S_{ki}=\sum_{i=1}^{i_0}\operatorname{mes} S_{ki},$$

и, следовательно,

$$\lim_{k\to\infty}\operatorname{mes}\bigcup_{i=1}^{i_0} S_{ki}=\sum_{i=1}^{i_0}\lim_{k\to\infty}\operatorname{mes} S_{ki}=\sum_{i=1}^{i_0}\operatorname{mes} G_i. \tag{44.16}$$

Всех множеств G_i конечное число, поэтому из кубируемости каждого из них следует (см. теорему 4), что

$$\lim_{k\to\infty}\operatorname{mes}\sigma_k=0. \tag{44.17}$$

Наконец,

$$\lim_{k\to\infty}\operatorname{mes} S_k=\operatorname{mes} G. \tag{44.18}$$

Переходя к пределу при $k\to\infty$ в неравенстве (44.15) и используя (44.16), (44.17) и (44.18), получаем равенство (44.14). Лемма доказана.

Определение 8. *Пусть $\tau=\{G_i\}$ и $\tau'=\{G_i'\}$**) *— разбиения*

---

*) Для простоты обозначений иногда будем вместо $\{G_i\}_{i=0}^{i=i_0}$ писать просто $\{G_i\}$.

открытого кубируемого множества G. Разбиение τ' называется разбиением, вписанным в разбиение τ, если для каждого элемента $G_j' \in \tau'$ существует элемент $G_i \in \tau$, такой, что $G_j' \subset G_i$.

В этом случае пишут $\tau' \succ \tau$, или $\tau \prec \tau'$.

Свойства разбиений.

1. Если $\tau \prec \tau'$ и $\tau' \prec \tau''$, то $\tau \prec \tau''$.

2. Для любых двух разбиений $\tau' = \{G_i'\}$ и $\tau'' = \{G_j''\}$ кубируемого открытого множества G существует его разбиение τ, такое, что $\tau \succ \tau'$ и $\tau \succ \tau''$.

Свойство 1 очевидно. В качестве указанного в свойстве 2 разбиения τ можно взять множество всевозможных непустых пересечений $G_i' \cap G_j''$.

Примером разбиения кубируемого открытого множества G является, например, совокупность всевозможных непустых пересечений данного открытого множества G с открытыми кубами некоторого фиксированного ранга k. Отсюда видно, что для всякого кубируемого открытого множества G существуют разбиения сколь угодно малой мелкости.

Определение 9. *Пусть на замыкании $\overline{G}$ открытого кубируемого множества $G \subset E^n$ задана функция $y = f(x) = f(x_1, \ldots, x_n)$ и $\tau = \{G_i\}_{i=1}^{i=i_0}$ — некоторое разбиение множества G.*

Любая сумма

$$\sigma_\tau = \sigma_\tau(f; \xi^{(1)}, \xi^{(2)}, \ldots, \xi^{(i_0)}) = \sum_{i=1}^{i_0} f(\xi^{(i)}) \operatorname{mes} G_i,$$

где

$$\xi^{(i)} \in \overline{G}_i, \quad i = 1, 2, \ldots, i_0,$$

называется интегральной суммой Римана функции f.

Определение 10. *Функция f называется интегрируемой по Риману на кубируемом открытом множестве G, если существует конечный предел*

$$\lim_{\delta_\tau \to 0} \sigma_\tau. \tag{44.19}$$

Этот предел называется кратным интегралом Римана от функции f по множеству G (или, что то же, по множеству $\overline{G}$) и обозначается

$$\int f(x)\, dG^{*)} \quad \text{или} \quad \iint\limits_G \ldots \int f(x_1, \ldots, x_n)\, dx_1 \ldots dx_n$$

---

*) Обозначение аргумента можно опускать: $\int f\, dG$.

(в этих записях вместо G пишется иногда $\overline{G}$). Множество G (а также и $\overline{G}$) в этом случае называется областью интегрирования.

Предел (44.19) встречается впервые (ср. с п. 27.1) и требует поэтому точного определения. Это определение формулируется следующим образом.

Определение 11. *Число A называется интегралом от функции f по кубируемому открытому множеству G, если, какова бы ни была последовательность разбиений $\tau_m = \{G_i^{(m)}\}_{i=1}^{i=i_0^{(m)}}$ множества G, такая, что $\delta_{\tau_m} \to 0$ при $m \to \infty$, и каковы бы ни были точки*

$$\xi_m^{(i_m)} \in \overline{G}_i^{(m)}, \qquad i_m = 1, 2, \ldots, i_0^{(m)}; \qquad m = 1, 2, \ldots,$$

справедливо равенство

$$\lim_{m \to \infty} \sigma_{\tau_m}\left(f; \xi_m^{(1)}, \xi_m^{(2)}, \ldots, \xi_m^{(i_0^{(m)})}\right) = A.$$

Упражнение 7. Сформулировать определение кратного интеграла на языке ε и δ.

44.4. Существование кратного интеграла

Теорема 5. *Пусть G — открытое кубируемое множество. Если функция f определена на множестве $\overline{G}$ и интегрируема на нем, то она ограничена на $\overline{G}$.*

Доказательство этой теоремы совершенно аналогично доказательству подобной теоремы в одномерном случае (см. п. 27.4).

Дальше в этом пункте предполагается, что функция f определена и ограничена на замыкании некоторого открытого кубируемого множества $G \subset E^n$. При этих предположениях, как и в одномерном случае, имеет смысл рассматривать верхние S_τ и нижние s_τ суммы Дарбу, определяемые следующим образом.

Определение 12. *Пусть $\tau = \{G_i\}_{i=1}^{i=i_0}$ — разбиение множества G,*

$$m_i = \inf_{x \in \overline{G}_i} f(x)$$

и

$$M_i = \sup_{x \in \overline{G}_i} f(x), \quad i = 1, 2, \ldots, i_0.$$

Тогда суммы

$$s_\tau = \sum_{i=1}^{i_0} m_i \operatorname{mes} G_i, \quad S_\tau = \sum_{i=1}^{i_0} M_i \operatorname{mes} G_i.$$

называются соответственно нижними и верхними суммами Дарбу.

Суммы Дарбу s_τ и S_τ связаны с интегральными суммами Римана очевидным неравенством

$$s_\tau \leqslant \sigma_\tau \leqslant S_\tau.$$

Как и в одномерном случае, $s_{\tau_1} \leqslant S_{\tau_2}$ для любых двух разбиений τ_1 и τ_2.

Теорема 6. *Для того чтобы функция f была интегрируема по Риману на открытом кубируемом множестве G, необходимо и достаточно, чтобы она была ограничена и чтобы*

$$\lim_{\delta_\tau \to 0} (S_\tau - s_\tau) = 0. \qquad (44.20)$$

При выполнении этих условий

$$\lim_{\delta_\tau \to 0} S_\tau = \lim_{\delta_\tau \to 0} s_\tau = \int f(x)\,dG.$$

Условие (44.20) равносильно условию

$$\lim_{\delta_\tau \to 0} \sum_{i=1}^{i_0} \omega(f; \overline{G}_i) \operatorname{mes} G_i = 0, \qquad (44.21)$$

где $\omega(f; \overline{G}_i)$ — колебание функции f на замыкании множества G_i, принадлежащего разбиению $\tau = \{G_i\}$ множества G.

Доказательство этой теоремы также вполне аналогично одномерному случаю (см п. 27.4).

Теорема 7. *Если функция f определена и непрерывна на замыкании $\overline{G}$ открытого кубируемого множества $G \subset E^n$, то она интегрируема по Риману на этом множестве.*

Действительно, из кубируемости открытого множества G следует его ограниченность; функция f, будучи непрерывной на ограниченном замкнутом множестве $\overline{G}$, является ограниченной и равномерно непрерывной на $\overline{G}$. Дальнейшее доказательство и в этом случае аналогично одномерному случаю (см. п. 27.5): легко получается оценка

$$S_\tau - s_\tau \leqslant \omega(\delta_\tau; f) \operatorname{mes} G,$$

где $\omega(\delta; f)$ — модуль непрерывности функции f. Из этой оценки в силу теоремы 6 сразу следует доказываемое утверждение.

Докажем теперь вспомогательное утверждение, полезное для дальнейшего.

Лемма 5. *Пусть G — открытое кубируемое множество, $E \subset \overline{G}$, $\operatorname{mes} E = 0$, $\tau = \{G_i\}_{i=1}^{i=i_0}$ — разбиение G. Тогда, если G_i^* — те элементы G_i разбиения τ, замыкания которых пересекаются с E, то*

$$\lim_{\delta_\tau \to 0} \operatorname{mes} \bigcup_i G_i^* = 0. \tag{44.22}$$

Доказательство. Зафиксируем некоторое $\varepsilon > 0$. В силу условия $\operatorname{mes} E = 0$ существует ранг k, такой, что если $S_k^* = S_k^*(E)$ — совокупность точек кубов ранга k, пересекающихся с E, то

$$\operatorname{mes} S_k^* < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{44.23}$$

Заметим, что, каков бы ни был ранг $k' > k$, мера множества точек кубов ранга k', пересекающихся с одним и тем же кубом ранга k и не содержащихся в нем, не превышает числа

$$\frac{2n}{10^{k'}}\left(\frac{1}{10^k} + \frac{2}{10^{k'}}\right)^{n-1}.$$

Действительно, указанное множество состоит из $2n$ параллелепипедов*) высоты $\frac{1}{10^{k'}}$ с основанием, объем которого равен $\left(\frac{1}{10^k} + \frac{2}{10^{k'}}\right)^{n-1}$. Обозначим через Q_j кубы ранга k, пересекающиеся с E; их конечное число, обозначим его через m. Выберем ранг k' так, чтобы

$$\frac{2n}{10^{k'}}\left(\frac{1}{10^k} + \frac{2}{10^{k'}}\right)^{n-1} < \frac{\varepsilon}{2m}. \tag{44.24}$$

Обозначим через P_j множество точек всех кубов ранга k', пересекающихся с Q_j (в том числе и содержащихся в нем). Очевидно, P_j — замкнутый куб, и в силу (44.24)

$$\operatorname{mes} P_j < \operatorname{mes} Q_j + \frac{\varepsilon}{2m}, \quad j = 1, 2, \ldots, m. \tag{44.25}$$

Согласно определению, $S_k^* = \bigcup_{j=1}^{m} Q_j$. Положим $P = \bigcup_{j=1}^{m} P_j$. Из (44.23) и (44.25) имеем

$$\operatorname{mes} P \leqslant \sum_{j=1}^{m} \operatorname{mes} P_j < \sum_{j=1}^{m} \operatorname{mes} Q_j + \frac{\varepsilon}{2} = \operatorname{mes} S_k^* + \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon.$$

*) $2n$ — число $n-1$-мерных граней n-мерного куба.

Заметим теперь, что любое множество D, которое имеет диаметр $d(D) < \frac{1}{10^{k'}}$ и пересекается с одним из кубов Q_j, целиком лежит в P_j (рис. 132). Возьмем какое-либо разбиение τ множества G мелкости $\delta_\tau < \frac{1}{10^{k'}}$. Тогда каждый элемент $G_i = G_i^* \in \tau$, замыкание $\overline{G}_i$ которого пересекается с E, очевидно, пересекается и с S_k^* (ибо $E \subset S_k^*$), откуда следует, что он целиком лежит в P.

Таким образом,

$$\bigcup_i G_i^* \subset P.$$

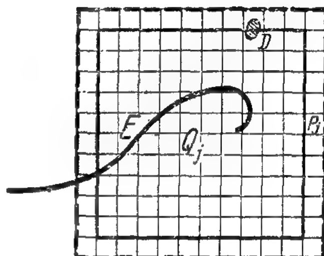


Рис. 132

Замечая, что G_i^* попарно не пересекаются, имеем

$$\sum_i \operatorname{mes} G_i^* = \operatorname{mes} \bigcup_i G_i^* \leqslant \operatorname{mes} P < \varepsilon,$$

что и доказывает равенство (44.22).

Лемма доказана.

Эта лемма позволяет при рассмотрении интеграла как предела интегральных сумм Римана (44.19), отбрасывать слагаемые, соответствующие элементам разбиения, пересекающимся с некоторым фиксированным множеством меры ноль, например, с границей кубируемого открытого множества, по которому производится интегрирование. Именно, справедлива следующая теорема.

Теорема 8. *Пусть G — открытое кубируемое множество в E^n, $E \subset G$, $\operatorname{mes} E = 0$, $\tau = \{G_i\}_{i=1}^{i=i_0}$ — разбиение множества G. Обозначим через G_i^* те элементы G_i разбиения τ, замыкание которых пересекается с E. Пусть функция f определена и ограничена на замыкании $\overline{G}$ множества G и $\xi_i \in \overline{G}_i$. Положим*

$$\sigma_\tau(f) = \sum_i f(\xi_i) \operatorname{mes} G_i,$$

$$\sigma'_\tau(f) = \sum_i{}' f(\xi_i) \operatorname{mes} G_i;$$

в первой сумме суммирование производится по всем индексам $i = 1, 2, \ldots, i_0$, а во второй знак «$'$» означает, что суммирование производится только по тем i, для которых $G_i \neq G_i^*$. Тогда предел

$$\lim_{\delta_\tau \to 0} \sigma_\tau(f) = \int f\, dG$$

существует тогда и только тогда, когда существует предел

$$\lim_{\delta_\tau \to 0} \sigma'_\tau(f).$$

При этом, если последний предел существует, то он также равен $\int f dG$.

Доказательство. Положим

$$\sigma^*_\tau(f) = \sum_i^* f(\xi_i) \operatorname{mes} G^*_i,$$

где знак «*» у суммы означает, что суммирование производится только по тем индексам i, для которых $G_i = G^*_i$, тогда, очевидно,

$$\sigma_\tau(f) = \sigma'_\tau(f) + \sigma^*_\tau(f). \tag{44.26}$$

В силу ограниченности на $\overline{G}$ функции f существует такая постоянная $M > 0$, что $|f(x)| \leqslant M$ для всех $x \in \overline{G}$, поэтому

$$|\sigma^*_\tau(f)| \leqslant M \sum_i^* \operatorname{mes} G^*_i,$$

поскольку, согласно лемме,

$$\lim_{\sigma_\tau \to 0} \sum_i^* \operatorname{mes} G^*_i = 0,$$

то

$$\lim_{\delta_\tau \to 0} \sigma^*_\tau = 0.$$

В силу этого из равенства (44.26) сразу и следует, что суммы $\sigma_\tau(f)$ и $\sigma'_\tau(f)$ одновременно имеют или не имеют предела при $\delta_\tau \to 0$, причем если эти пределы существуют, то они равны.

Теорема доказана.

Из теоремы 8 следует, что если функция f определена и ограничена на замыкании $\overline{G}$ открытого множества G, то изменение ее значений на множестве $E \subset \overline{G}$ меры ноль, в результате которого вновь получается ограниченная на $\overline{G}$ функция, не влияет ни на интегрируемость функции f, ни на значение ее интеграла, если он существует. Это сразу следует из того, что при указанном изменении сумма $\sigma'_\tau(f)$ не меняется, а в силу теоремы 8, если ее предел при $\delta_\tau \to 0$ существует, то он равен интегралу $\int f dG$, т. е.

$$\lim_{\delta_\tau \to 0} \sigma'_\tau(f) = \int f dG.$$

44.5. Свойства кратного интеграла

1. *Пусть G — открытое кубируемое множество, тогда*

$$\int dG = \operatorname{mes} G.$$

Действительно, в данном случае подынтегральная функция тождественно равна единице; поэтому, если $\tau = \{G_i\}_{i=1}^{i=i_0}$ — некоторое разбиение G, то (см. (44.14)

$$\int dG = \lim_{\delta_\tau \to 0} \sum_{i=1}^{i_0} \operatorname{mes} G_i = \operatorname{mes} G.$$

2. *Пусть G и $G^{(1)}$ — кубируемые множества, $G^{(1)} \subset G$ и функция f интегрируема на G, тогда функция f интегрируема и на $G^{(1)}$.*

Пусть $G \neq G^{(1)}$ (в случае $G = G^{(1)}$ утверждение тривиально), тогда множество $G^{(2)} = G \setminus \overline{G}^{(1)}$ не пусто и является открытым кубируемым множеством. Пусть $\tau^{(1)} = \{G_i^{(1)}\}$ — разбиение множества $G^{(1)}$ мелкости $\delta_{\tau^{(1)}}$ и $\tau^{(2)} = \{G_j^{(2)}\}$ — разбиение множества $G^{(2)}$ мелкости $\delta_{\tau^{(2)}} \leqslant \delta_{\tau^{(1)}}$, тогда $\tau = \{G_i^{(1)}, G_j^{(2)}\}$ является разбиением множества G мелкости $\delta_\tau = \delta_{\tau^{(1)}}$. Если

$$\omega_\tau = \sum_i \omega(f, G_i^{(1)}) \operatorname{mes} G_i^{(1)} + \sum_j \omega(f, G_j^{(2)}) \operatorname{mes} G_j^{(2)}$$

и

$$\omega_{\tau^{(1)}} = \sum_i \omega(f, G_i^{(1)}) \operatorname{mes} G_i^{(1)},$$

то, очевидно, $\omega_{\tau^{(1)}} \leqslant \omega_\tau$.

Так как

$$\lim_{\delta_\tau \to 0} \omega_\tau = 0, \quad \text{то} \lim_{\delta_{\tau^{(1)}} \to 0} \omega_{\tau^{(1)}} = 0,$$

отсюда и следует интегрируемость функции f на множестве $G^{(1)}$ (см. (44.21)).

3 (*аддитивность интеграла по множествам*). *Пусть G, $G^{(1)}$ и $G^{(2)}$ — открытые кубируемые множества, $G^{(1)} \subset G$, $G^{(2)} = G \setminus \overline{G}^{(1)}$ и пусть функция f интегрируема на G, тогда она интегрируема на $G^{(1)}$ и $G^{(2)}$, причем*

$$\int f dG = \int f dG^{(1)} + \int f dG^{(2)}. \tag{44.27}$$

Действительно, в силу свойства 2 интегралы $\int f dG^{(1)}$ и $\int f dG^{(2)}$ существуют. Пусть $\tau^{(1)} = \{G_i^{(1)}\}$ и $\tau^{(2)} = \{G_j^{(2)}\}$ — разбиения соответственно множеств $G^{(1)}$ и $G^{(2)}$, тогда $\tau = \{G_i^{(1)}, G_j^{(2)}\}$ является разбиением множества G и его мелкость

$$\delta_\tau = \max\{\delta_{\tau^{(1)}}, \delta_{\tau^{(2)}}\}.$$

$$\text{Пусть} \qquad \xi_i \in \overline{G}_i^{(1)}, \quad \eta_j \in \overline{G}_j^{(2)},$$

$$\sigma_{\tau^{(1)}} = \sum_i f(\xi_i) \operatorname{mes} G_i^{(1)}, \qquad \sigma_{\tau^{(2)}} = \sum_j f(\eta_j) \operatorname{mes} G_j^{(2)},$$

$$\sigma_\tau = \sigma_{\tau^{(1)}} + \sigma_{\tau^{(2)}}. \tag{44.28}$$

В силу интегрируемости функции f на множествах $G^{(1)}$, $G^{(2)}$ и G

$$\lim_{\delta_{\tau^{(1)}} \to 0} \sigma_{\tau^{(1)}} = \int f dG^{(1)}, \ \lim_{\delta_{\tau^{(2)}} \to 0} \sigma_{\tau^{(2)}} = \int f dG^{(2)},$$

$$\lim_{\delta_\tau \to 0} \sigma_\tau = \int f dG,$$

поэтому, переходя к пределу в равенство (44.28) при $\delta_\tau \to 0$, мы и получим (44.27).

4 (*линейность интеграла*). *Пусть функции f и g интегрируемы на открытом кубируемом множестве G, тогда для любых чисел λ и μ*

$$\int (\lambda f + \mu g)\, dG = \lambda \int f dG + \mu \int g dG.$$

В частности,

$$\int (f + g)\, dG = \int f dG + \int g dG, \qquad \int \lambda f dG = \lambda \int f dG.$$

5. *Пусть функции f и g интегрируемы на открытом кубируемом множестве G, тогда и их произведение fg также интегрируемо на G.*

6. *Пусть функции f и g интегрируемы на открытом кубируемом множестве G и $f \leqslant g$ на G, тогда*

$$\int f dG \leqslant \int g dG.$$

7. *Пусть функция f интегрируема на открытом кубируемом множестве G, тогда и $|f|$ интегрируема на G. При этом*

$$\left| \int f dG \right| \leqslant \int |f|\, dG.$$

Доказательство свойств 4, 5, 6 и 7 проводится совершенно аналогично одномерному случаю (см. п. 28.1).

8 (*монотонность интеграла*). *Пусть G и Γ — кубируемые открытые множества, $\Gamma \subset G$, функция f интегрируема на G; тогда, если $f \geqslant 0$ на G, то*

$$\int f dG \geqslant \int f d\Gamma.$$

Действительно, в силу свойства 3 интегралы $\int f d\Gamma$ и $\int f d(G \setminus \overline{\Gamma})$ существуют и

$$\int f dG = \int f d\Gamma + \int f d(G \setminus \overline{\Gamma}),$$

в силу же свойства 6 имеем $\int f d(G \setminus \overline{\Gamma}) \geqslant 0$. Поэтому

$$\int f dG = \int f d\Gamma + \int f d(G \setminus \overline{\Gamma}) \geqslant \int f d\Gamma.$$

9 (*полная аддитивность интеграла по множествам*). *Пусть функция f интегрируема на кубируемом открытом множестве G и G_k, $k = 1, 2, \ldots,$— последовательность кубируемых множеств такая, что $G_k \subset G$ и*

$$\lim_{k \to \infty} \operatorname{mes} G_k = \operatorname{mes} G^{*)}, \tag{44.29}$$

тогда

$$\lim_{k \to \infty} \int f dG_k = \int f dG. \tag{44.30}$$

В силу интегрируемости на множестве G функция f ограничена на этом множестве, т. е. существует такая постоянная $M > 0$, что $|f(x)| \leqslant M$ для всех $x \in G$. Далее, $G \setminus \overline{G}_k$ — также открытое кубируемое множество и в силу аддитивности меры

$$\operatorname{mes}(G \setminus \overline{G}_k) = \operatorname{mes} G - \operatorname{mes} G_k.$$

Далее, в силу аддитивности интеграла по множествам (см. свойство 3)

$$\int f dG - \int f dG_k = \int f d(G \setminus \overline{G}_k),$$

откуда

$$\left| \int f dG - \int f dG_k \right| \leqslant \int |f| \, d(G \setminus \overline{G}_k) \leqslant$$
$$\leqslant M \operatorname{mes}(G \setminus \overline{G}_k) = M(\operatorname{mes} G - \operatorname{mes} G_k)$$

---

*) Это условие, в частности, выполняется, если последовательность множеств G_k такова, что $G_k \subset G_{k+1}$, $k = 1, 2, \ldots,$ и $\bigcup_{k=1}^{\infty} G_k = G$ (см. теорему 2 в п. 31.2).

и, следовательно, в силу (44.29)

$$\lim_{k\to\infty}\left|\int f dG - \int f dG_k\right| = 0,$$

что и доказывает равенство (44.30).

10 (*теорема о среднем*). *Пусть G — открытое кубируемое множество, функции f и g определены и интегрируемы на $\overline{G}$. Если функция g не меняет знака на G и*

$$m \leqslant f(x) \leqslant M, \quad x \in \overline{G},$$

то существует такое число μ,

$$m \leqslant \mu \leqslant M,$$

что

$$\int g f dG = \mu \int g dG.$$

Следствие. *Если функция f непрерывна на замыкании кубируемой области G, то существует такая точка $\xi \in \overline{G}$, что*

$$\int f dG = f(\xi) \operatorname{mes} G.$$

Теорема о среднем доказывается совершенно аналогично одномерному случаю (см. п. 28.2). Для получения следствия надо использовать теорему о промежуточных значениях непрерывной на замкнутой области функции (см. п. 19.4).

§ 45. СВЕДЕНИЕ КРАТНОГО ИНТЕГРАЛА К ПОВТОРНОМУ

45.1. Основная теорема для двумерного случая

Перейдем теперь к методам вычисления кратных интегралов. Будем проводить полные доказательства в основном для случая двух переменных, так как в общем n-мерном случае доказательство может быть проведено с помощью той же идеи, однако рассуждения примут более громоздкий и более трудно обозримый вид.

Определение 1. *Пусть на плоскости E^2 фиксирована прямоугольная система координат x, y. Область $G \subset E^2$ называется элементарной относительно оси Oy, если ее граница состоит из графиков двух непрерывных функций $\varphi(x)$ и $\psi(x)$, определенных на некотором отрезке $[a, b]$ и таких, что $\varphi(x) \leqslant \psi(x)$, $x \in [a, b]$, а также, быть может из отрезков прямых $x = a$ и $x = b$* (рис. 133).

Аналогично определяется область, элементарная относительно оси Ox.

Теорема. *Пусть G — элементарная относительно оси Oy плоская область, граница которой состоит из графиков непрерывных*

функций $\varphi(x)$ *и* $\psi(x)$, $\varphi(x) \leqslant \psi(x)$, $x \in [a, b]$ *и, быть может отрезков прямых* $x = a$ *и* $x = b$. *Если функция* $f(x, y)$ *непрерывна на* $\overline{G}$, *то*

$$\iint\limits_{G} f(x, y)\,dx\,dy = \int\limits_a^b \left[\int\limits_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x, y)\,dy\right] dx. \qquad (45.1)$$

Интеграл, стоящий в правой части формулы (45.1), называется *повторным интегралом* и обычно записывается в виде

$$\int\limits_a^b dx \int\limits_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x, y)\,dy.$$

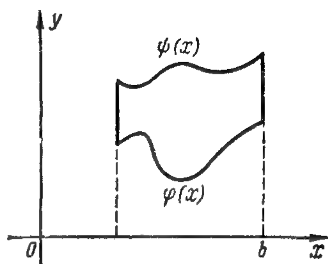


Рис. 133

Для доказательства теоремы понадобится следующая лемма.

Лемма 1. *В предположениях теоремы функция*

$$F(x) = \int\limits_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x, y)\,dy \qquad (45.2)$$

является непрерывной функцией от x *на отрезке* $[a, b]$.

Доказательство леммы. В силу непрерывности на ограниченном замкнутом множестве $\overline{G}$ функция f ограничена на $\overline{G}$, т. е. существует такая постоянная $M > 0$, что

$$|f(x, y)| \leqslant M, \quad (x, y) \in \overline{G}.$$

Пусть теперь $x \in [a, b]$ и $x + \Delta x \in [a, b]$ фиксированы. Пусть $\Delta\varphi = \varphi(x + \Delta x) - \varphi(x)$, $\Delta\psi = \psi(x + \Delta x) - \psi(x)$ и для определенности $\psi(x) - \varphi(x) \geqslant \Delta\varphi \geqslant 0$*), $\Delta\psi \geqslant 0$, тогда

$$|F(x + \Delta x) - F(x)| = \left| \int\limits_{\varphi(x)+\Delta\varphi}^{\psi(x)+\Delta\psi} f(x + \Delta x, y)\,dy - \int\limits_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x, y)\,dy \right| =$$

---

*) Если $\varphi(x) - \psi(x) > 0$, то условие $\psi(x) - \varphi(x) \geqslant \Delta\varphi$ всегда выполняется для всех достаточно малых Δx. Если же $\varphi(x) = \psi(x)$, $\Delta\varphi \geqslant 0$, $\Delta\psi \geqslant 0$, то проводимые нами рассуждения только упрощаются, и в результате вместо нижеследующей оценки (45.4) для указанных точек x получается более простая оценка:

$$|F(x + \Delta x) - F(x)| \leqslant M\Delta\varphi + M\Delta\psi.$$

$$= \left| \int\limits_{\varphi(x)+\Delta\varphi}^{\psi(x)} f(x+\Delta x, y)\,dy + \int\limits_{\psi(x)}^{\psi(x)+\Delta\psi} f(x+\Delta x, y)\,dy - \right.$$

$$\left. - \int\limits_{\varphi(x)}^{\varphi(x)+\Delta\varphi} f(x, y)\,dy - \int\limits_{\varphi(x)+\Delta\varphi}^{\psi(x)} f(x, y)\,dy \right| \leqslant$$

$$\leqslant \int\limits_{\varphi(x)+\Delta\varphi}^{\psi(x)} |f(x+\Delta x, y) - f(x, y)|\,dy + \int\limits_{\varphi(x)}^{\varphi(x)+\Delta\varphi} |f(x, y)|\,dy +$$

$$+ \int\limits_{\psi(x)}^{\psi(x)+\Delta\psi} |f(x+\Delta x, y)|\,dy. \qquad (45.3)$$

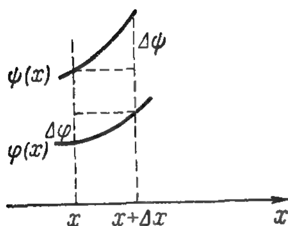


Рис. 134

Пределы интегрирования подобраны таким образом, чтобы подынтегральные функции были определены на отрезках, по которым производится интегрирование (рис. 134).

Обозначая через $\omega(\delta; f)$ модуль непрерывности функции f на $\overline{G}$, получим

$$|F(x+\Delta x) - F(x)| \leqslant$$

$$\leqslant \omega(\Delta x; f)\,[\psi(x) - \varphi(x) - \Delta\varphi] + M\Delta\varphi +$$

$$+ M\Delta\psi \leqslant \omega(\Delta x; f) \sup_{a \leqslant x \leqslant b} [\psi(x) - \varphi(x)] + M\,\Delta\psi + M\,\Delta\varphi. \qquad (45.4)$$

В силу непрерывности функций φ и ψ разность $\psi(x) - \varphi(x)$ ограничена и

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta\varphi = \lim_{\Delta x \to 0} \Delta\psi = 0.$$

В силу же непрерывности f на ограниченном замкнутом множестве G она и равномерно непрерывна на нем, следовательно,

$$\lim_{\Delta x \to 0} \omega(\Delta x; f) = 0.$$

Таким образом, из (45.4) получаем равенство

$$\lim_{\Delta x \to 0} |F(x+\Delta x) - F(x)| = 0, \qquad (45.5)$$

что и означает непрерывность функции F в точке x.

В случаях, когда $\Delta\varphi \geqslant 0$, $\Delta\psi \leqslant 0$ или $\Delta\varphi \leqslant 0$, $\Delta\psi \geqslant 0$ или $\Delta\varphi \leqslant 0$, $\Delta\psi \leqslant 0$, доказательство аналогично, только пределы интегрирования у интегралов, стоящих в правой части неравенства

(45.3), надо выбирать несколько иначе, а именно всегда так, чтобы подынтегральные функции были определены на отрезках, по которым производится интегрирование.

Во всех этих случаях получается неравенство, получающееся из неравенства (45,3), если в нем заменить $\Delta\varphi$ и $\Delta\psi$ на $|\Delta\varphi|$ и $|\Delta\psi|$, откуда, очевидно, и следует (45.5).

Лемма доказана.

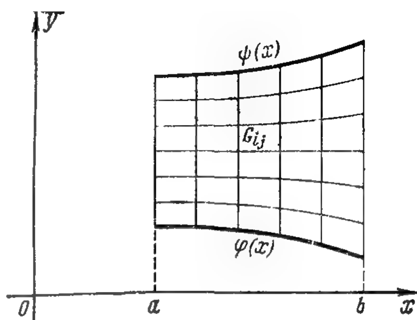


Рис. 135

Доказательство теоремы. Прежде всего заметим, что интеграл, стоящий в правой части равенства (45.1), т. е. интеграл

$$\int_a^b F(x)\,dx = \int_a^b dx \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x, y)\,dy,$$

является интегралом от непрерывной функции (см. лемму) и потому существует.

Разобьем теперь область G на части G_{ij}, $i, j = 1, 2, \ldots, k$, следующим образом. Возьмем разбиение $\tau_k = \{x_i\}_{i=0}^{i=k}$ отрезка $[a, b]$ на k равных отрезков:

$$a = x_0 < x_1 < \ldots < x_k = b, \quad x_i - x_{i-1} = \frac{b-a}{k}, \; i = 1, 2, \ldots, k,$$

и пусть

$$\varphi_0(x) = \varphi(x),$$

$$\varphi_1(x) = \varphi(x) + \frac{1}{k}[\psi(x) - \varphi(x)],$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\varphi_j(x) = \varphi(x) + \frac{j}{k}[\psi(x) - \varphi(x)],$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\varphi_k(x) = \varphi(x) + \frac{k}{k}[\psi(x) - \varphi(x)] = \psi(x).$$

Положим $G_{ij} = \{(x, y): x_{i-1} \leqslant x \leqslant x_i,\; \varphi_{j-1}(x) \leqslant y \leqslant \varphi_j(x)\}$, и пусть $\tau_k^* = \{G_{ij}\}$, $i, j = 1, 2, \ldots, k$. Очевидно, что τ_k^* является разбиением области G (рис. 135).

Теперь имеем

$$\int_a dx \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x, y)\,dy = \sum_{i=1}^{k} \int_{x_{i-1}}^{x_i} dx \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x, y)\,dy =$$

$$= \sum_{i=1}^{k} \int_{x_{i-1}}^{x_i} dx \sum_{j=1}^{k} \int_{\varphi_{j-1}(x)}^{\varphi_j(x)} f(x, y)\, dy =$$

$$= \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{k} \int_{x_{i-1}}^{x_i} dx \int_{\varphi_{j-1}(x)}^{\varphi_j(x)} f(x, y)\, dy. \qquad (45.6)$$

Положим

$$m_{ij} = \inf_{G_{ij}} f(x, y) \text{ и } M_{ij} = \sup_{G_{ij}} f(x, y),\ i, j = 1, 2, \ldots, k,$$

тогда

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} dx \int_{\varphi_{j-1}(x)}^{\varphi_j(x)} f(x, y)\, dy \leqslant M_{ij} \int_{x_{i-1}}^{x_i} dx \int_{\varphi_{j-1}(x)}^{\varphi_j(x)} dy =$$

$$= M_{ij} \int_{x_{i-1}}^{x_i} [\varphi_j(x) - \varphi_{j-1}(x)]\, dx = M_{ij} \operatorname{mes} G_{ij}, \qquad (45.7)$$

и аналогично,

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} dx \int_{\varphi_{j-1}(x)}^{\varphi_j(x)} f(x, y)\, dy \geqslant m_{ij} \operatorname{mes} G_{ij}. \qquad (45.8)$$

С помощью неравенств (45.7) и (45.8) для интеграла (45.6) получаем следующую оценку через нижние и верхние суммы Дарбу функции $f(x, y)$:

$$s_{\tau_k^*} = \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{k} m_{ij} \operatorname{mes} G_{ij} \leqslant \int_a^b dx \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x, y)\, dy \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{k} M_{ij} \operatorname{mes} G_{ij} = S_{\tau_k^*}. \qquad (45.9)$$

Для мелкости $\delta_{\tau_k^*}$ разбиения τ_k^* области G имеем (почему?)

$$\lim_{k \to \infty} \delta_{\tau_k^*} = 0,$$

поэтому в силу интегрируемости функции $f(x, y)$ на G (см. п. 44.4)

$$\lim_{k \to \infty} s_{\tau_k^*} = \lim_{k \to \infty} S_{\tau_k^*}.$$

Переходя теперь к пределу в неравенство (45.9) при $k \to \infty$, получим формулу (45.1).

Теорема доказана.

Если теперь область G элементарна относительно оси Ox и ее граница состоит из графиков непрерывных функций $\alpha(y)$ и $\beta(y)$, $\alpha(y) \leqslant \beta(y), c \leqslant y \leqslant d$, и, быть может, отрезков прямых $y=c$ и $y=d$, а функция $f(x, y)$, как и раньше, непрерывна на замкнутой области $\overline{G}$, то справедлива формула

$$\iint_G f(x,y)\,dx\,dy = \int_c^d dy \int_{\alpha(y)}^{\beta(y)} f(x, y)\,dx. \tag{45.10}$$

Если же область G элементарна как относительно оси Ox, так и относительно оси Oy, то, приравнивая правые части (45.1) и (45.10), для непрерывной на G функции получим формулу

$$\int_a^b dx \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x, y)\,dy = \int_c^d dy \int_{\alpha(y)}^{\beta(y)} f(x, y)\,dx, \tag{45.11}$$

выражающую собой правило перемены порядка интегрирования в повторных интегралах.

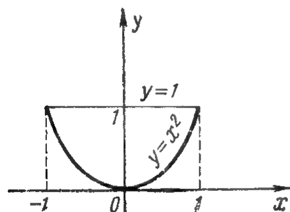


Рис. 136

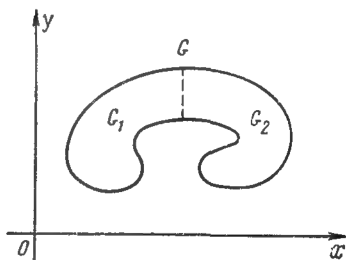


Рис. 137

Пример. Вычислить интеграл от функции $z=x^2y$ по конечной области G, ограниченной частью параболы $y=x^2$ и прямой $y=1$ (рис. 136).

Решение.

$$\iint_G x^2y\,dx\,dy = \int_{-1}^{1} x^2dx \int_{x^2}^{1} y\,dy = \int_{-1}^{1} \frac{y^2}{2}\Big|_{x^2}^{1} x^2dx =$$

$$= \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} (1-x^4)\,x^2\,dx = \frac{4}{21}.$$

Если требуется вычислить кратный интеграл по области, не являющейся элементарной ни относительно оси Ox, ни относительно оси Oy, то, для того чтобы применить полученные формулы, надо

попытаться разбить данную область на части, каждая из которых уже будет элементарной хотя бы относительно одной из осей координат (рис. 137). Если это удается сделать, то в силу аддитивности интеграла по множеству (см. п. 44.5) вычисление данного интеграла сведется к вычислению интегралов по указанным частям, а последние с помощью формул (45.1) и (45.10) могут быть сведены к однократным.

45.2. Обобщения на n-мерный случай

Пусть теперь E^n — n-мерное пространство, E^{n-1} — гиперплоскость $x_n = 0$. Пусть G — область в E^n и G_{x_n} — ее проекция на гиперплоскость E^{n-1}:

$$G_{x_n} = \{(x_1, \ldots, x_{n-1}): \text{существует такое } x_n, \text{ что } (x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n) \in G\}.$$

Определение 2. *Область G называется элементарной относительно оси x_n, если ее проекция G_{x_n} является кубируемой областью, а граница состоит из графиков двух непрерывных на $\overline{G}_{x_n}$ функций $\varphi(x_1, \ldots, x_{n-1})$ и $\psi(x_1, \ldots, x_{n-1})$, $\varphi(x_1, \ldots, x_{n-1}) \leqslant \psi(x_1, \ldots, x_{n-1})$, $(x_1, \ldots, x_{n-1}) \in \overline{G}_{x_n}$, и, быть может, части цилиндра, основанием которого является граница ∂G_{x_n} области G_{x_n}.*

Поскольку в случае $n = 1$ всякая область является интервалом (почему?), то для плоских областей данное в этом пункте определение области, элементарной относительно некоторой оси, совпадает с соответствующим определением предыдущего пункта.

Если область G элементарна относительно оси Ox_n, то она кубируема. Действительно, ее проекция G_{x_n}, являясь кубируемой областью, ограничена, поэтому граница области G, состоящая из графиков непрерывных на ограниченном замкнутом множестве G_{x_n} функций и, быть может, части цилиндра с основанием меры ноль ($\text{mes}\, \partial G_{x_n} = 0$ в силу кубируемости G_{x_n}), также имеет меру ноль.

Пусть G — элементарная относительно оси x_n область с границей, состоящей из графиков непрерывных на $\overline{G}_{x_n}$ функций: $\varphi(x_1, \ldots, x_{n-1})$ и $\psi(x_1, \ldots, x_{n-1})$, $\varphi(x_1, \ldots, x_{n-1}) \leqslant \psi(x_1, \ldots, x_{n-1})$, $(x_1, \ldots, x_{n-1}) \in G_{x_n}$ и, быть может, части цилиндра с основанием ∂G_{x_n}, и пусть функция f определена и непрерывна на $\overline{G}$, тогда аналогично формуле (45.1) доказывается формула

$$\overbrace{\iint_G \ldots \int}^{n \text{ раз}} f(x_1, \ldots, x_n)\, dx_1 \ldots dx_n =$$

$$= \overbrace{\iint\limits_{G_{x_n}} \dots \int}^{n-1 \text{ раз}} dx_1 \dots dx_{n-1} \int\limits_{\varphi(x_1, \dots, x_{n-1})}^{\psi(x_1, \dots, x_{n-1})} f(x_1, \dots, x_n)\, dx_n,$$

которая сводит интегрирование функции от n переменных к последовательному интегрированию функции одного переменного и функции $(n-1)$-го переменного.

Если в рассматриваемом случае область G_{x_n} в свою очередь является элементарной относительно некоторой координаты, то получившийся $(n-1)$-кратный интеграл можно свести к однократному и $(n-2)$-кратному интегралу. Продолжая этот процесс, если, конечно, это возможно дальше, придем к формуле вида

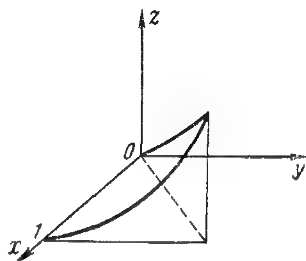


Рис. 138

$$\overbrace{\iint\limits_{G} \dots \int}^{n \text{ раз}} f(x_1, \dots, x_n)\, dx_1, \dots, dx_n =$$

$$= \int\limits_a^b dx_1 \int\limits_{\varphi_{n-1}(x_1)}^{\psi_{n-1}(x_1)} dx_2 \dots \int\limits_{\varphi_1(x_1, \dots, x_{n-1})}^{\psi_1(x_1, \dots, x_{n-1})} f(x_1, \dots, x_n)\, dx_n. \quad (45.12)$$

Таким образом, в рассматриваемом случае интегрирование функции от n переменных сводится к последовательному интегрированию n раз функций одного переменного.

П р и м е р. Вычислить интеграл от функции $f(x, y, z) = xy^2z^3$ по конечной области G, ограниченной поверхностями $z = xy$, $y = x$, $x = 1$ и $z = 0$ (рис. 138).

Решение. Применяя формулу (45.12), получим

$$\iiint\limits_G xy^2 z^3\, dx\, dy\, dz = \int\limits_0^1 x dx \int\limits_0^x y^2\, dy \int\limits_0^{xy} z^3\, dz =$$

$$= \frac{1}{4} \int\limits_0^1 x^5 dx \int\limits_0^x y^6\, dy = \frac{1}{28} \int\limits_0^1 x^{12}\, dx = \frac{1}{364}.$$

§ 46. ЗАМЕНА ПЕРЕМЕННЫХ В КРАТНОМ ИНТЕГРАЛЕ

46.1. Геометрический смысл модуля якобиана в двумерном случае

Пусть G — открытое множество на плоскости E^2_{uv}, G^* — открытое множество на плоскости E^2_{xy}, F — отображение G на G^* и

$$M=(u, v) \in G, \quad M^*=(x, y) \in G^*, \quad F(M)=M^*.$$

Отображение F задается парой функций

$$x=x(u, v), \qquad y=y(u, v). \tag{46.1}$$

Будем предполагать, что отображение F удовлетворяет следующим условиям:

1) отображение F взаимно однозначно отображает G на G^*;
2) отображение F непрерывно дифференцируемо на G;
3) якобиан $J(u, v) = \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}$ не обращается в ноль на G.

Заметим, что отображение F^{-1}, обратное отображению F, также является непрерывно дифференцируемым взаимно однозначным отображением с якобианом, не равным нулю на G^* (см. п. 41.4).

Лемма 1. *Если γ — кусочно-гладкая кривая, лежащая в G, то ее образ $\gamma^* = F(\gamma)$ при отображении F также будет кусочно-гладкой кривой.*

Действительно, если

$$u=u(t), \quad v=v(t), \quad a \leqslant t \leqslant b,$$

— кусочно-непрерывно дифференцируемое представление кривой γ, то представлением кривой γ^* будет пара функций

$$x=x(u(t), \quad v(t)), \quad y=y(u(t), v(t)), \quad a \leqslant t \leqslant b,$$

которые в силу свойств суперпозиций непрерывно дифференцируемых функций (см. п. 19.3 и п.20.3) также будут кусочно-непрерывно дифференцируемыми.

Замечание. Если γ — простой замкнутый контур, лежащий в G, то в силу взаимной однозначности отображения F его образ $\gamma^* = F(\gamma)$ также является простым замкнутым контуром.

Лемма 2. *Пусть Γ — открытое ограниченное множество и $\overline{\Gamma} \subset G$. Тогда $\Gamma^* = F(\Gamma)$ — также ограниченное открытое множество и*

$$\partial F(\Gamma) = F(\partial\Gamma). \tag{46.2}$$

Доказательство. При отображении F внутренние точки переходят во внутренние (см. п. 41.5), поэтому из открытости множества Γ вытекает и открытость множества $F(\Gamma)$. Далее, поскольку Γ — ограниченное множество, то замкнутое множество $\overline{\Gamma}$ также ограничено. Согласно лемме 3 п. 41.4, множество $F(\overline{\Gamma})$ также ограничено и замкнуто. Из ограниченности $F(\overline{\Gamma})$ вытекает и ограниченность множества $F(\Gamma)$, ибо $F(\Gamma)\subset F(\overline{\Gamma})$.

Докажем теперь равенство (46.2). Имеем $\overline{\Gamma} = \Gamma \cup \partial\Gamma$ (см. п. 18.2), поэтому $F(\overline{\Gamma}) = F(\Gamma) \cup F(\partial\Gamma)$. Множество $F(\Gamma)$ открыто и потому не содержит граничных точек множества $F(\Gamma)$. Следовательно,

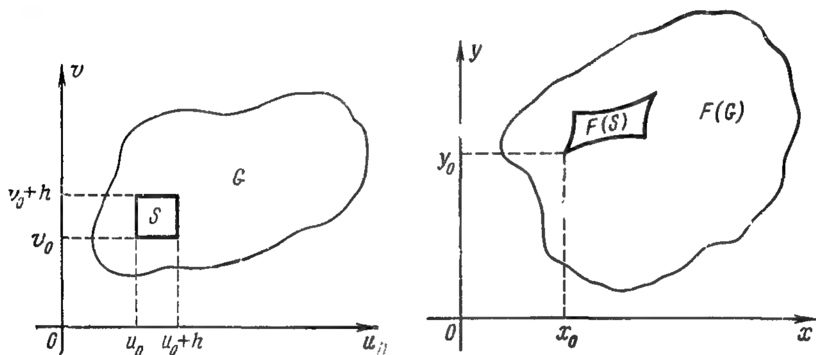


Рис. 139

$$\partial F(\Gamma) \subset F(\partial\Gamma). \tag{46.3}$$

С другой стороны, если какая-либо окрестность O некоторой точки множества G, $O\subset G$, содержит точки как принадлежащие Γ, так и не принадлежащие Γ, то в силу взаимнооднозначности отображения F образ этой окрестности будет также содержать точки, как принадлежащие $F(\Gamma)$, так и не принадлежащие $F(\Gamma)$. Поэтому граничные точки Γ перейдут в граничные точки $F(\Gamma)$, т. е.

$$F(\partial\Gamma) \subset \partial F(\Gamma). \tag{46.4}$$

Из условий (46.3) и (46.4) и следует равенство (46.2).

Лемма доказана.

Следствие. *Если в предположениях леммы 2 граница Γ состоит из конечного числа кусочно-гладких кривых, то открытые множества Γ и $F(\Gamma)$ квадрируемы.*

Доказательство. В силу леммы 1 и равенства (46.2) граница $F(\Gamma)$ также состоит из конечного числа кусочно-гладких

кривых. Кусочно-гладкие кривые спрямляемы, а спрямляемая кривая имеет меру ноль (см. п. 44.1). Таким образом, $\operatorname{mes} \partial \Gamma = \operatorname{mes} \partial F(\Gamma) = 0$, и, следовательно, Γ и $F(\Gamma)$ квадрируемы.

Следствие доказано.

Пусть, теперь $(u_0, v_0) \in G$ и пусть h — некоторое число. Рассмотрим замкнутый квадрат S (рис. 139) с вершинами в точках

$$(u_0\, v_0), (u_0 + h,\ v_0), (u_0 + h,\ v_0 + h), (u_0,\ v_0 + h). \tag{46.5}$$

Пусть $S \subset G$ (при достаточно малом h это включение всегда выполняется, почему?). Граница ∂S квадрата S, состоящая из четырех его сторон, очевидно, является простым замкнутым кусочно-гладким контуром. В силу следствия леммы 2 множество $S^* = F(S)$ (см. рис. 139) представляет собой замкнутую квадрируемую область (то, что S^* — область, следует из принципа сохранения области, см. п. 41.5).

Теорема 1. *Пусть отображение F открытого множества $G \subset E^2_{uv}$ на открытое множество $G^* \subset E^2_{xy}$ взаимно однозначно и непрерывно дифференцируемо на G и пусть его якобиан $J(u, v)$ не обращается в ноль на G. Тогда, если S—квадрат с вершинами* (46.5), *то*

$$\frac{\operatorname{mes} F(S)}{\operatorname{mes} S} = |J(u_0, v_0)| + \varepsilon(u_0, v_0, h), \tag{46.6}$$

где функция $\varepsilon(u_0, v_0, h)$ стремится к нулю при $h \to 0$ равномерно относительно (u_0, v_0) на любом замкнутом ограниченном множестве $A \subset G$.

Следствие.

$$\lim_{h \to 0} \frac{\operatorname{mes} F(S)}{\operatorname{mes} S} = |J(u_0, v_0)| \tag{46.7}$$

для любой точки $(u_0, v_0) \in G$.

Действительно, (46.7), очевидно, является частным случаем (46.6), например, когда множество A состоит из одной точки (u_0, v_0).

Доказательство теоремы. В силу дифференцируемости отображение F в окрестности каждой точки отличается от некоторого линейного отображения $\tilde{F}$ (см. ниже формулы (46.9)) на бесконечно малые более высокого порядка, чем приращения аргументов. Для линейного же отображения площадь образа квадрата равна произведению площади этого квадрата на абсолютную величину его определителя, который для линейного отображения $\tilde{F}$ совпадает с якобианом $J = J(u_0, v_0)$ отображения F.

Покажем, что площадь образа квадрата S при отображении F отличается от площади образа этого квадрата при отображении $\tilde{F}$ на бесконечно малую более высокого порядка, чем площадь квадрата

S, и что эта оценка равномерна на любом ограниченном замкнутом множестве $A \subset G$, т. е., что

$$\operatorname{mes} F(S) = \operatorname{mes} \widetilde{F}(S) + \varepsilon \operatorname{mes} S,$$

где ε равномерно на A стремится к нулю, когда сторона квадрата S стремится к нулю. Поскольку $\widetilde{F}(S) = |J| \operatorname{mes} S$, то отсюда и будет следовать формула (46.7).

Введем обозначения:

$$x(u_0, v_0) = x_0, \qquad y(u_0, v_0) = y_0,$$
$$\frac{\partial x(u_0, v_0)}{\partial u} = a_{11} \quad \frac{\partial x(u_0, v_0)}{\partial v} = a_{12},$$
$$\frac{\partial y(u_0, v_0)}{\partial u} = a_{21}, \quad \frac{\partial y(u_0, v_0)}{\partial v} = a_{22},$$
$$u - u_0 = \Delta u, \ v - v_0 = \Delta v, \ r = \sqrt{\Delta u^2 + \Delta v^2}.$$

Зафиксируем некоторое ограниченное замкнутое множество $A \subset G$. Пусть $(u_0, v_0) \subset A$. В силу дифференцируемости функций (46.1) имеем формулы $x = x(u, v) =$

$$= x_0 + a_{11}(u - u_0) + a_{12}(v - v_0) + \alpha_{11}(u - u_0) + \alpha_{12}(v - v_0),$$
$$y = y(u, v) = \tag{46.8}$$
$$= y_0 + a_{21}(u - u_0) + a_{22}(v - v_0) + \alpha_{21}(u - u_0) + \alpha_{22}(v - v_0),$$

где функции $\alpha_{jk}(u_0, v_0, \Delta u, \Delta v)$ равномерно стремятся к нулю на множестве A при $\rho \to 0$ (см. замечание к теореме 3 п. 20.2, а также п. 39.4).

Наряду с отображением F рассмотрим линейное отображение $\widetilde{F}$ плоскости E^2_{uv} на плоскость E^2_{xy}, задаваемое формулами

$$\begin{aligned} \tilde{x} &= x_0 + a_{11}(u - u_0) + a_{12}(v - v_0), \\ \tilde{y} &= y_0 + a_{21}(u - u_0) + a_{22}(v - v_0). \end{aligned} \tag{46.9}$$

Как известно из аналитической геометрии, для линейного отображения образом всякого параллелограмма, в частности квадрата S, является параллелограмм, причем отношение площади последнего к площади исходного параллелограмма равно абсолютной величине определителя отображения. Таким образом, в рассматриваемом нами случае для отображения (46.9) имеем

$$\frac{\operatorname{mes} \widetilde{F}(S)}{\operatorname{mes} S} = \left\| \begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{matrix} \right\| = |J(u_0, v_0)|. \tag{46.10}$$

В дальнейшем мы оценим, насколько отличается площадь множества $F(S)$ от площади множества $\widetilde{F}(S)$.

Множества $E_{uv}^2 \setminus G$ и A не пересекаются и замкнуты, кроме того, A ограничено, поэтому

$$\eta = \rho(E_{uv}^2 \setminus G, A) > 0 \tag{46.11}$$

(см. теорему 5 в п. 18.2).

В дальнейшем будем предполагать, что $|h| < \frac{\eta}{\sqrt{2}}$. В этом случае из того, что $(u_0, v_0) \in A$ следует, что $S \subset G$.

Оценим расстояние между образами одной и той же точки при отображении F и $\widetilde{F}$. Пусть $M = (u, v) \in G$, $F(M) = (x, y)$ и $\widetilde{F}(M) = (\widetilde{x}, \widetilde{y})$, тогда

$$\rho(F(M), \widetilde{F}(M)) = \sqrt{(x-\widetilde{x})^2 + (y-\widetilde{y})^2}. \tag{46.12}$$

Из формул (46.8) и (46.9), применяя неравенство Коши — Шварца (см. п. 18.1), получим неравенства

$$(x-\widetilde{x})^2 = (\alpha_{11}\Delta u + \alpha_{12}\Delta v)^2 \leqslant (\alpha_{11}^2 + \alpha_{12}^2)(\Delta u^2 + \Delta v^2) = (\alpha_{11}^2 + \alpha_{12}^2) r^2,$$
$$(y-\widetilde{y})^2 = (\alpha_{21}\Delta u + \alpha_{22}\Delta v)^2 \leqslant (\alpha_{21}^2 + \alpha_{22}^2)(\Delta u^2 + \Delta v^2) = (\alpha_{21}^2 + \alpha_{22}^2) r^2.$$

Подставим эти неравенства в (46.12):

$$\rho(F(M), \widetilde{F}(M)) \leqslant r\sqrt{\alpha_{11}^2 + \alpha_{12}^2 + \alpha_{21}^2 + \alpha_{22}^2}.$$

Полагая $\varepsilon_1 = \sqrt{\alpha_{11}^2 + \alpha_{12}^2 + \alpha_{21}^2 + \alpha_{22}^2}$, перепишем полученное неравенство в виде

$$\rho(F(M), \widetilde{F}(M)) \leqslant \varepsilon_1 r, \tag{46.13}$$

где $\varepsilon_1 = \varepsilon_1(u_0, v_0, \Delta u, \Delta v)$ равномерно стремится к нулю на множестве A при $\rho \to 0$, ибо этим свойством обладают α_{ij} $(i, j = 1, 2)$. Замечая, что при $M \in S$ справедливо неравенство $\rho \leqslant |h|\sqrt{2}$, из (46.13) получим неравенство

$$\rho(F(M), \widetilde{F}(M) \leqslant \varepsilon_1 |h| \sqrt{2}.$$

Если положить

$$\varepsilon_2(u_0, v_0, h) = \sqrt{2} \sup_{M \in S} \varepsilon_1(u_0, v_0, \Delta u, \Delta v), \tag{46.14}$$

то

$$\rho(F(M), \widetilde{F}(M)) \leqslant \varepsilon_2 |h|, \quad M \in S$$

откуда

$$d = \sup_{M \in S} \rho(F(M), \widetilde{F}(M)) \leqslant \varepsilon_2 |h|, \tag{46.15}$$

где ε_2 равномерно на A стремится к нулю при $h \to 0$.

Построим «рамку» ширины d (см. 46.15) около сторон параллелограмма $\widetilde{S}$ следующим образом. Проведем вне параллелограмма $\widetilde{S}$ четыре прямые, каждая из которых отстоит на расстояние d от одной из сторон параллелограмма $\widetilde{S}$. Из построенного таким образом параллелограмма выбросим все точки, находящиеся на расстоянии, большем, чем d от параллелограмма $\widetilde{S}$, — получим множество $\widetilde{S}_e$*), состоящее из параллелограмма $\widetilde{S}$, четырех параллелограммов Π_e^j, $j = 1, 2, 3, 4$, высоты d, одна из сторон каждого из которых совпадает с одной из сторон параллелограмма S, и четырех секторов σ_j, $j = 1, 2, 3, 4$, радиуса d, с вершинами в вершинах параллелограмма $\widetilde{S}$ и ограниченных радиусами, параллельными сторонам параллелограмма $\widetilde{S}$ (рис. 140).

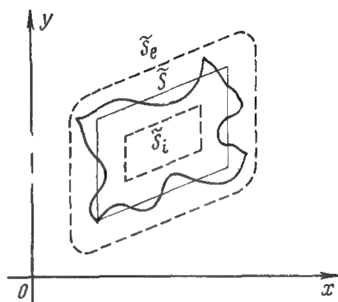


Рис. 140

Теперь проведем четыре прямые, каждая из которых отстоит также на расстояние d от одной из сторон параллелограмма $\widetilde{S}$ и пересекает его внутренность. Эти четыре прямые образуют параллелограмм $\widetilde{S}_i$**), содержащийся в параллелограмме $\widetilde{S}$ (в дальнейшем покажем, что при достаточно малых h множество $\widetilde{S}_i$ не пусто). Часть параллелограмма $\widetilde{S}$, получающаяся из него вычетом множества $\widetilde{S}_i$, т. е. множество $\widetilde{S} \setminus \widetilde{S}_i$, состоит из четырех параллелограммов Π_i^j, $j=1, 2, 3, 4$, некоторые из которых частично перекрываются. Высоты этих параллелограммов равны d, а одна из сторон каждого из них совпадает с одной из сторон параллелограмма $\widetilde{S}$.

Множество

$$R = \bigcup_{j=1}^{4} \Pi_e^j \cup \bigcup_{j=1}^{4} \sigma_j \cup \bigcup_{j=1}^{4} \Pi_i^j \tag{46.16}$$

назовем «рамкой».

Покажем, что площадь множества $F(S)$ отличается от площади параллелограмма $\widetilde{F}(S)$ не более чем на площадь рамки R. Для этого прежде всего установим, что

$$\widetilde{S}_i \subset F(S) \subset \widetilde{S}_e. \tag{46.17}$$

---

*) «e» = начальная буква французского слова extérieur (внешний).

**) «i» = начальная буква французского слова intérieur (внутренний).

Действительно, если $M \in S$, то $\tilde{F}(M) \in \tilde{S}$ и, согласно (46.5), $\rho(F(M), \tilde{F}(M)) \leqslant d$. Но по построению множество $\tilde{S}_e$ содержит все точки плоскости, находящиеся от параллелограмма $\tilde{S}$ на расстоянии, не превышающем числа d; поэтому $F(M) \in \tilde{S}_e$, и включение $F(S) \subset \tilde{S}_e$ доказано.

Второе включение в (46.17) доказывается сложнее. Предварительно сделаем некоторые оценки.

Для них потребуются две постоянные c_1 и c_2. Определим их.

По предположению отображение F непрерывно дифференцируемо, а A — ограниченное замкнутое множество. Поэтому существует такая постоянная $c_1 > 0$, что на ограниченном замкнутом множестве (см. п. 18.2)

$$A_{\frac{\eta}{2}} = \left\{M : \rho(M, A) \leqslant \frac{\eta}{2}\right\}$$

(определение числа η см. в формуле (46.11)) выполняются неравенства

$$\left|\frac{\partial u}{\partial x}\right| \leqslant c_1, \left|\frac{\partial u}{\partial y}\right| \leqslant c_1, \left|\frac{\partial v}{\partial x}\right| \leqslant c_1, \left|\frac{\partial v}{\partial y}\right| \leqslant c_1. \tag{46.18}$$

В дальнейшем будем предполагать, что $|h| \leqslant \frac{\eta}{2\sqrt{2}}$. В этом случае $S \subset A_{\frac{\eta}{2}}$ при $(u_0, v_0) \in A$.

Далее, по предположению якобиан $J(u, v)$ отображения F, являющийся непрерывной функцией, не обращается в ноль на G. Поэтому существует постоянная $c_2 > 0$, такая, что на ограниченном замкнутом множестве A выполняется неравенство (почему?)

$$|J(u, v)| \geqslant c_2 > 0. \tag{46.19}$$

Пусть длины сторон параллелограмма $\tilde{S}$ суть a и b, а его высоты, опущенные на них, равны соответственно H_a и H_b.

Предположим, что сторона параллелограмма $\tilde{S}$ длины a соединяет точки (x_0, y_0) и $(x_0 + a_{11}h, y_0 + a_{21}h)$. Тогда из (46.9) и (46.18) следует, что

$$a = \sqrt{a_{11}^2 h^2 + a_{21}^2 h^2} = |h| \sqrt{a_{11}^2 + a_{21}^2} \leqslant c_1 \sqrt{2} |h|. \tag{46.20}$$

Аналогично

$$b = \sqrt{a_{12} h^2 + a_{22} h^2} \leqslant c_1 \sqrt{2} |h|. \tag{46.21}$$

Замечая, что $\operatorname{mes} \tilde{S} = aH_a = bH_b$ и что $S = h^2$, из неравенств (46.20) и (46.21) имеем

$$c_1\sqrt{2}\,|h|\,H_a \geqslant aH_a = |J(u_0 v_0)|\,h^2 \geqslant c_2 h^2,$$

$$c_1\sqrt{2}\,|h|\,H_b \geqslant bH_b = |J(u_0, v_0|\,h^2 \geqslant c_2 h^2.$$

Отсюда получаем

$$H_a \geqslant \frac{c_2}{c_1\sqrt{2}}|h|,\ H_b \geqslant \frac{c_2}{c_1\sqrt{2}}|h|. \tag{46.22}$$

Выберем теперь $\delta > 0$ так, чтобы при $|h| < \delta$ и $(u_0, v_0) \in A$ выполнялось условие

$$|\varepsilon_2| < \frac{1}{4\sqrt{2}}\frac{c_2}{c_1} \tag{46.23}$$

(определение ε_2 см. в формуле (46.14)). Это всегда возможно сделать в силу равномерного на A стремления ε_2 к нулю при $h \to 0$. В дальнейшем будем предполагать, что $|h| < \delta$.

Теперь докажем включение $\widetilde{S}_i \subset F(S)$.

Прежде всего заметим, что

$$F(\partial S) \subset R. \tag{46.24}$$

Действительно, если $M \in \partial S$, то $\widetilde{F}(M) \in \partial\widetilde{S}$ и, согласно (46.15), $\rho(F(M), \widetilde{F}(M)) \leqslant d$. Но по построению рамка R содержит все точки плоскости, отстоящие от границы $\partial\widetilde{S}$ параллелограмма $\widetilde{S}$ на расстояние, не превышающем числа d, поэтому $F(M) \in R$ и включение (46.24) доказано.

Поскольку при сделанных предположениях граница $\partial F(S)$ образа $F(S)$ квадрата S совпадает с образом $F(\partial S)$ границы ∂S квадрата S (см. лемму 2 п. 46.1), то включение (46.24) можно переписать в виде

$$\partial F(S) \subset R. \tag{46.25}$$

Пусть теперь M_0—центр квадрата S. При отображении $\widetilde{F}$ он переходит в центр $\widetilde{M}_0 = \widetilde{F}(M_0)$ параллелограмма $\widetilde{S}$. Покажем, что замкнутый шар Q радиуса d с центром в точке $\widetilde{M}_0$ содержится в $\widetilde{S}_i$. Поскольку точка $\widetilde{M}_0$ находится на расстоянии $\frac{1}{2}H_a$ и $\frac{1}{2}H_b$ от сторон параллелограмма $\widetilde{S}$, а стороны параллелограмма $\widetilde{S}_i$ отстоят от сторон параллелограмма $\widetilde{S}$ на расстояние d, то достаточно доказать неравенства (см. рис. 141)

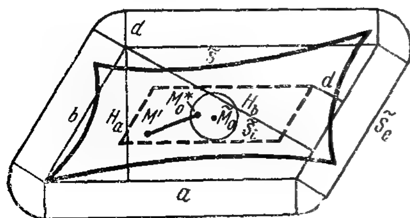


Рис. 141

$$\frac{1}{2} H_a > 2d, \quad \frac{1}{2} H_b > 2d. \qquad (46.26)$$

Применяя последовательно неравенства (46.15), (46.23) и (46.22), получим

$$2d < 2\varepsilon_2 |h| < \frac{1}{2\sqrt{2}} \frac{c_2}{c_1} |h| \leqslant \frac{1}{2} H_a.$$

Первое из неравенств (46.26) доказано, аналогично доказывается и второе.

Итак, шар $Q \subset \widetilde{S}_i$; но если $M_0^* = F(M_0)$, то, согласно (46.15), $\rho(\widetilde{M}_0, M_0^*) \leqslant d$ и, следовательно, $M_0^* \in Q$, а потому и $M_0^* \in \widetilde{S}_i$.

Таким образом, $\widetilde{S}_i$ содержит заведомо одну точку $F(S)$, а именно образ M_0^* центра M_0 квадрата S при отображении F.

Покажем теперь, что и все точки $\widetilde{S}_i$ принадлежат $F(S)$. Допустим противное: пусть существует такая точка $M' \in \widetilde{S}_i$, что $M' \notin F(S)$ (см. рис. 141). Тогда согласно лемме 7 п. 18.2 параллелограмм $\widetilde{S}_i$, являющийся связным множеством, пересекался бы и с границей $\partial F(S)$ множества $F(S)$, что противоречит включению (46.25).

Таким образом, не существует точки $M' \in \widetilde{S}_i$ и одновременно $M' \notin F(S)$, поэтому $\widetilde{S}_i \subset F(S)$. Формула (46.17) доказана.

Очевидно, что также

$$\widetilde{S}_i \subset \widetilde{S} = \widetilde{F}(S) \subset \widetilde{S}_e.$$

Отсюда и из (46.17) имеем

$$\operatorname{mes} \widetilde{S}_i \leqslant \operatorname{mes} \widetilde{F}(S) \leqslant \operatorname{mes} \widetilde{S}_e,$$

$$\operatorname{mes} \widetilde{S}_i \leqslant \operatorname{mes} F(S) \leqslant \operatorname{mes} \widetilde{S}_e$$

и, следовательно,

$$|\operatorname{mes} F(S) - \operatorname{mes} \widetilde{F}(S)| \leqslant \operatorname{mes} \widetilde{S}_e - \operatorname{mes} \widetilde{S}_i = \operatorname{mes} R. \qquad (46.27)$$

Оценим площадь рамки R. Сумма площадей секторов σ_j, $j = 1, 2, 3, 4$, равна площади круга радиуса d. Отсюда, используя оценку (46.15), имеем

$$\sum_{j=1}^{4} \operatorname{mes} \sigma_j = \pi d^2 \leqslant \pi \varepsilon_2^2 h^2. \qquad (46.28)$$

Площадь каждого из параллелограммов Π_e^j и Π_i^j, $j = 1, 2, 3, 4$, равна либо ad, либо bd, поэтому из (46.20), (46.21) и (46.15) имеем

$$\operatorname{mes} \Pi_e^j \leqslant \sqrt{2}\, c_1 |h|\, d \leqslant \sqrt{2}\, c_1 \varepsilon_2 h^2,$$
$$\operatorname{mes} \Pi_i^j \leqslant \sqrt{2}\, c_1 |h|\, d \leqslant \sqrt{2}\, c_1 \varepsilon_2 h^2, \quad j = 1, 2, 3, 4. \qquad (46.29)$$

Из определения рамки (46.16) и оценок (46.28) и (46.29) следует, что

$$\operatorname{mes} R \leqslant \pi \varepsilon_2^2 h^2 + 8\sqrt{2}\, c_1 \varepsilon_2 h^2 = \pi\varepsilon_2 + 8\sqrt{2}\, c_1) \varepsilon_2\, h^2. \qquad (46.30)$$

Функция ε_2 ограничена на $A_{\frac{\eta}{2}}$ (это следует из ограниченности на $A_{\frac{\eta}{2}}$ функций α_{jk}, j, $k = 1, 2$, что в свою очередь следует из их явного выражения через производные функций u и v (см. п. 20.2)), поэтому

$$c_3 = \sup_{A_{\frac{\eta}{2}}} (\pi\varepsilon_2 + 8\sqrt{2}\, c_1) < \infty,$$

и, следовательно, из (46.30) получим

$$\operatorname{mes} R \leqslant c_3\, \varepsilon_2 h^2.$$

Таким образом (см. (46.27)),

$$|\operatorname{mes} F(S) - \operatorname{mes} \widetilde{F}(S)| \leqslant c_3\, \varepsilon_2 h^2.$$

Положим

$$\varepsilon(u_0, v_0, h) = \frac{\operatorname{mes} F(S) - \operatorname{mes} \widetilde{F}(S)}{h^2}, \qquad (46.31)$$

тогда $|\varepsilon| \leqslant c_3 |\varepsilon_2|$ и потому ε равномерно на A стремится к нулю при $h \to 0$.

Из (46.31) имеем

$$\operatorname{mes} F(S) = \operatorname{mes} \widetilde{F}(S) + \varepsilon h^2.$$

Вспоминая, что $\operatorname{mes} \widetilde{F}(S) = |J(u_0, v_0)| \operatorname{mes} S$ и $h^2 = \operatorname{mes} S$, получим $\operatorname{mes} F(S) = |J(u_0, v_0| \operatorname{mes} S + \varepsilon \operatorname{mes} S$, что, очевидно, равносильно равенству (46.6).

Теорема доказана.

46.2. Замена переменных в двукратном интеграле

Вначале сохраним обозначения и предположения предыдущего пункта, в частности, будем предполагать, что F является взаимно однозначным непрерывно дифференцируемым отображением открытого множества $G \subset E_{uv}^2$ на открытое множество $G^* \subset E_{xy}^2$ с яко-

бианом, не равным нулю на G. Пусть Γ и Γ^* — квадрируемые (и, следовательно, ограниченные) открытые множества, $\overline{\Gamma}\subset G$, $\overline{\Gamma^*}\subset G^*$, и пусть при отображении F множество $\overline{\Gamma}$ отображается на $\overline{\Gamma^*}$. Тогда при этом отображении внутренние точки Γ переходят во внутренние, а граница Γ отображается на границу Γ^*.

Теорема 2 (формула замены переменных в двукратном интеграле). *Пусть функция $f(x, y)$ определена и непрерывна на $\overline{\Gamma^*}$. Тогда*

$$\iint\limits_{\Gamma^*} f(x, y)\,dx\,dy = \iint\limits_{\Gamma} f[x(u, v), y(u,v)]\left|\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}\right| du\,dv. \qquad (46.32)$$

Доказательство. Заметим, что указанные интегралы существуют, как интегралы от функций непрерывных на замыкании квадрируемых областей. Действительно, функция $f(x, y)$ на $\overline{\Gamma^*}$ и якобиан $\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}$ на $\overline{\Gamma}$ непрерывны по условию, а функция $f[x(u, v), y(u, v)]$ непрерывна на $\overline{\Gamma}$, как суперпозиция непрерывных функций.

Возьмем разбиение ранга k плоскости E^2_{uv} на квадраты. Ранг k выберем столь большим, чтобы всякий квадрат ранга, пересекающийся с $\overline{\Gamma}$, целиком содержался в G (почему такой ранг существует?).

Обозначим через Γ_i, $i = 1, 2, \ldots, i_k$, всевозможные непустые пересечения внутренностей (множества внутренних точек) квадратов ранга k с множеством Γ. Множества Γ_i являются квадрируемыми открытыми множествами, ибо их границы имеют меру ноль, так как состоят, вообще говоря, из части границы соответствующего квадрата ранга k и части границы множества Γ. Совокупность $\tau_k = \{\Gamma_i\}_{i=1}^{i=i_k}$ образует разбиение множества Γ, причем, очевидно,

$$\lim_{k\to\infty} \delta_{\tau_k} = 0. \qquad (46.33)$$

Пусть, далее, $\Gamma_i^* = F(\Gamma_i)$; при этом граница Γ_i отображается на границу Γ_i^*, поэтому граница Γ_i^*, вообще говоря, состоит из части границы множества Γ^* (эта граница, в силу предположенной квадрируемости множества Γ^*, имеет меру ноль) и части кусочно-гладкой кривой, являющейся образом границы соответствующего квадрата и имеет поэтому также меру ноль. Из сказанного следует, что Γ_i^* является квадрируемым открытым множеством. Из взаимной однозначности отображения F следует, что совокупность $\tau_k^* = \left\{\Gamma_i^*\right\}_{i=1}^{i=i_k}$ образует разбиение множества Γ^*.

Оценим мелкость разбиения τ_k^*. Пусть δ_k — диаметр квадрата ранга k $\left(\text{очевидно, } \delta_k = \frac{\sqrt{2}}{10^k}\right)$ и $M_1^* = (x_1, y_1) \in \Gamma_i^*$, $M_2^* = (x_2, y_2) \in \Gamma_i$,

тогда существуют такие $M_1 \in \Gamma_i$ и $M_2 \in \Gamma_i$, что $F(M_1) = M_1^*$, $F(M_2) = M_2^*$, причем $\rho(M_1, M_2) < \delta_k$. Следовательно,

$$\rho(M_1^*, M_2^*) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} \leqslant \sqrt{\omega^2(\delta_k; x) + \omega^2(\delta_k; y)}, \quad (46.34)$$

где $\omega(\delta; x)$ и $\omega(\delta; y)$ суть модули непрерывности функций $x = x(u, v)$ и $y = y(u, v)$ на ограниченном замкнутом множестве $\overline{\Gamma}$. В силу непрерывности этих функций на $\overline{\Gamma}$ они равномерно непрерывны, и поэтому (см. п. 19.5)

$$\lim_{k \to \infty} \omega(\delta_k; x) = \lim_{k \to \infty} \omega(\delta_k; y) = 0. \quad (46.35)$$

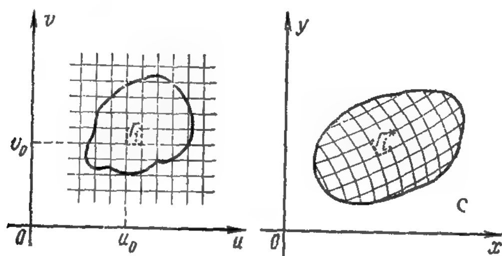


Рис. 142

Из (46.34) для диаметра $d(\Gamma_i^*)$ получаем

$$d(\Gamma_i^*) = \sup_{\substack{M_1^* \in \Gamma_i^* \\ M_2^* \in \Gamma_i^*}} \rho(M_1^*, M_2^*) \leqslant \sqrt{\omega^2(\delta_k; x) + \omega^2(\delta_k; y)},$$

откуда в силу (46.35)

$$\lim_{k \to \infty} d(\Gamma_i^*) = 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, i_k),$$

и, следовательно,

$$\lim_{k \to \infty} \delta_{\tau_k^*} = 0. \quad (46.36)$$

Составим теперь интегральную сумму для функции f, отобрав из элементов разбиения τ_k^* только те, замыкания которых не пересекаются с границей Γ^*. Это, очевидно, имеет место тогда и только тогда, когда элемент разбиения τ_k^* является образом целого квадрата ранга k, содержащегося в Γ (рис. 142). В качестве точки $(\xi_i, \eta_i) \in \overline{\Gamma}_i^*$ возьмем образ одной из вершин (u_i, v_i) указанного квадрата:

$$\xi_i = x(u_i, v_i), \quad \eta_i = y(u_i, v_i). \quad (46.37)$$

Пусть

$$\sigma'_{\tau_k^*} = \sum_i{}' f(\xi_i, \eta_i) \operatorname{mes} \Gamma_i^* \tag{46.38}$$

(штрих у знака суммы означает, что суммирование распространяется только на те индексы i, для которых $\overline{\Gamma}_i^*$ не пересекаются с границей).

Как известно (см. теорему 8 в п. 44.4), в силу выполнения условия (46.36)

$$\lim_{k\to\infty} \sigma'_{\tau_k^*} = \iint_{\Gamma^*} f(x,y)dxdy. \tag{46.39}$$

С другой стороны, для $\Gamma_i^* = F(\Gamma_i)$, для которых Γ_i является квадратом, согласно теореме 1 предыдущего пункта,

$$\operatorname{mes} \Gamma_i^* = |J(u_i, v_i)| \operatorname{mes} \Gamma_i + \varepsilon_i \operatorname{mes} \Gamma_i, \tag{46.40}$$

где $\varepsilon_i = \varepsilon_i(u_i, v_i, \delta_{\tau_k})$ равномерно на $\overline{\Gamma}$ стремится к нулю при $k \to \infty$. Подставляя (46.37) и (46.40) в (46.38), получаем

$$\sigma'_{\tau_i^*} = \sum_i{}' f[x(u_i, v_i), y(u_i, v_i)] \, |J(u_i, v_i)| \operatorname{mes} \Gamma_i +$$
$$+ \sum_i{}' \varepsilon_i f[x(u_i, v_i), y(u_i, v_i)] \operatorname{mes} \Gamma_i. \tag{46.41}$$

Суммирование в этих суммах распространено по всем индексам i, для которых $\overline{\Gamma}_i$ не пересекается с границей Γ.

Для первой суммы, стоящей в правой части равенства (46.41), в силу условия (46.33) имеем (см. теорему 8 в п. 44.4)

$$\lim_{k\to\infty} \sum_i{}' f[x(u_i, v_i), \; y(u_i, v_i)] \, |J(u_i, v_i)| \operatorname{mes} \Gamma_i =$$
$$= \iint_{\Gamma} f[x(u, v), \; y(u, v)] \, |J(u, v)| \, du\, dv.$$

Что же касается второй суммы, то она стремится к нулю при $k \to \infty$. Действительно, в силу непрерывности функции $f[x(u, v), y(u, v)]$ на ограниченном замкнутом множестве $\overline{\Gamma}$ она ограничена на нем, т. е. существует такая постоянная $C > 0$, что

$$|f[x(u, v), \; y(u, v)]| \leqslant C, \quad (u, v) \in \overline{\Gamma}.$$

Если фиксировано произвольное $\varepsilon > 0$, то в силу равномерного на $\overline{\Gamma}$ стремления ε_i к нулю при $k \to \infty$ можно выбрать k_0

так, чтобы при $k \geqslant k_0$ выполнялось неравенство $|\varepsilon_i| < \frac{\varepsilon}{C \operatorname{mes} \Gamma}$ для всех $(u_i, v_i) \in \overline{\Gamma}_i$, $\overline{\Gamma}_i \subset \overline{\Gamma}$; тогда

$$\left|\sum_i{}' \varepsilon_i f[x(u_i, v_i),\ y(u_i, v_i)] \operatorname{mes} \Gamma_i\right| \leqslant$$

$$\leqslant \sum_i{}' |\varepsilon_i|\, |f[x(u_i, v_i),\ y(u_i, v_i)]| \operatorname{mes} \Gamma_i <$$

$$< \frac{\varepsilon}{\operatorname{mes} \Gamma} \sum_i{}' \operatorname{mes} \Gamma_i \leqslant \varepsilon.$$

Итак,

$$\lim_{k \to \infty} \sigma'_{\tau^*_k} = \iint_{\Gamma} f[x(u, v),\ y(u, v)]\, |J(u, v)|\, du\, dv. \qquad (46.42)$$

Из (46.39) и (46.42) и следует непосредственно формула (46.32). Теорема доказана.

Доказанная теорема легко обобщается и на несколько более общий случай, когда якобиан отображения (46.1) может обращаться в ноль на границе области интегрирования, а само отображение быть не взаимно однозначным на этой границе. Точнее, справедлива следующая теорема.

Теорема 2′. *Пусть G и G^* — открытые кубируемые множества: $G \subset E^2_{uv}$, $G^* \subset E^2_{xy}$, и*

$$x = x(u, v),$$
$$y = y(u, v)$$

— непрерывное отображение $\overline{G}$ на $\overline{G^*}$, взаимно однозначно и непрерывно дифференцируемо отображающее G на G^*, пусть якобиан $\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}$ этого отображения не обращается в ноль на G и непрерывно продолжаем на $\overline{G}$. Тогда если функция $f(x, y)$ непрерывна на множестве $\overline{G}^*$, то

$$\iint_{G^*} f(x, y)\, dx\, dy = \iint_{G} f[x(u, v),\ y(u, v)] \left|\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}\right| du\, dv.$$

Доказательство. Пусть Γ_k, $k = 1, 2 \dots$ — последовательность ограниченных открытых квадрируемых множеств, граница которых состоит из конечного числа кусочно-гладких кривых, и

$$\overline{\Gamma}_k \subset G,\ \Gamma_k \subset \Gamma_{k+1},\quad \bigcup_{k=1}^{\infty} \Gamma_k = G.$$

За множество Γ_k можно взять, например, множество внутренних точек множества точек кубов ранга k, содержащихся

в G, т. е. множество внутренних точек множества $S_k(G)$ (см. п. 44.1). Пусть $\Gamma_k^* = F(\Gamma_k)$, тогда Γ_k^* также является ограниченным открытым квадрируемым множеством,

$$\overline{\Gamma}_k^* = F\left(\overline{\Gamma}_k\right) \subset G^*, \quad \Gamma_k^* \subset \Gamma_{k+1}^* \quad \text{и} \quad \bigcup_{k=1}^{\infty} \Gamma_k^* = G^*.$$

Из выполнения этих условий следует, что (см. теорему 2 п. 31.2)

$$\lim_{k\to\infty} \operatorname{mes} \Gamma_k = \operatorname{mes} G, \quad \lim_{k\to\infty} \operatorname{mes} \Gamma_k^* = \operatorname{mes} G^*. \tag{46.43}$$

Для каждого из множеств Γ_k, $k=1, 2, \ldots$, выполняются все условия теоремы 2 этого пункта, поэтому

$$\iint\limits_{\Gamma_k^*} f(x, y)\,dx\,dy = \iint\limits_{\Gamma_k} f[x(u, v),\ y(u, v)]\left|\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}\right| du\,dv. \tag{46.44}$$

Функция $f(x, y)$, как непрерывная на $\overline{G}^*$ функция, интегрируема на G^*, а функция $f[x(u, v),\ y(u, v)]\left|\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}\right|$ по тем же соображениям интегрируема*) на G. Поэтому в силу выполнения условий (46.43) получаем (см. п. 44.5):

$$\lim_{k\to\infty} \iint\limits_{\Gamma_k^*} f(x, y)\,dx\,dy = \iint\limits_{G^*} f(x, y)\,dx\,dy,$$

$$\lim_{k\to\infty} \iint\limits_{\Gamma_k} f[x(u, v),\ y(u, v)]\left|\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}\right| du\,dv =$$

$$= \iint\limits_{G} f[x(u, v),\ y(u, v)]\left|\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}\right| du\,dv. \tag{46.45}$$

Переходя к пределу при $k \to \infty$ в равенстве (46.44), в силу формул (46.45) мы и получим искомую формулу замены переменного в интеграле.

Теорема доказана.

Замена переменных в кратных интегралах часто существенно упрощает исследование и вычисление данного интеграла. При этом, в отличие от однократного интеграла, нередко целью замены переменного является не упрощение вида подынтегральной функции, а

---

*) Напомним, что в силу условий теоремы эта функция непрерывно продолжаема с множества G на множество $\overline{G}$, причем значение продолженной функции на границе G не влияет на значение интеграла (см. п. 44.4).

упрощение вида области интегрирования, быть может, при одновременном определенном усложнении подынтегральной функции.

Пример. Вычислить интеграл

$$\iint\limits_{x^2+y^2<1} \cos \pi \sqrt{x^2+y^2}\, dx\, dy.$$

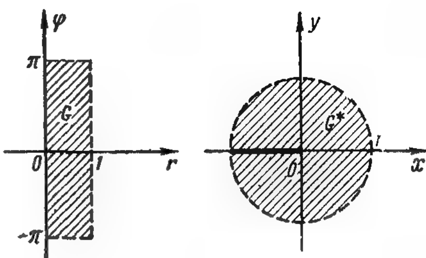


Рис. 143

Решение. Введем новые переменные r, φ по формулам

$$\left.\begin{aligned} x &= r\cos\varphi, \\ y &= r\sin\varphi. \end{aligned}\right\} \qquad (46.46)$$

Тогда

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(r, \varphi)} = \begin{vmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi \\ \sin\varphi & r\cos\varphi \end{vmatrix} = r.$$

Отображение (46.46) отображает прямоугольник

$$G = \{(r, \varphi) : 0 < r < 1, \quad -\pi < \varphi < \pi\}$$

взаимно однозначно, непрерывно дифференцируемо и с якобианом, не равным нулю, на круг $K = \{(x, y) : x^2 + y^2 < 1\}$, из которого выброшен радиус, лежащий на отрицательной части оси Ox, т. е. на множество (рис. 143)

$$G^* = K \setminus \{(x, y) : x \leqslant 0, \quad y = 0\}.$$

Замкнутый же прямоугольник $\overline{G}$ при отображении (46.46) отображается на замкнутый круг $\overline{G^*} = \overline{K}$, причем на границе $\overline{G}$ это отображение уже не взаимно однозначно. Якобиан отображения (46.46) непрерывен на $\overline{G}$, причем в одной точке границы, в начале координат, он обращается в ноль. Все условия, накладываемые на отображение (46.1) в теореме 2′ этого пункта выполняются для отображения (46.46), поэтому можно применить формулу замены переменного в интеграле:

$$\iint\limits_{x^2+y^2<1} \cos \pi \sqrt{x^2+y^2}\, dx\, dy = \iint\limits_{\substack{0<r<1 \\ -\pi<\varphi<\pi}} r \cos \pi r\, dr\, d\varphi =$$

$$= \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^1 r\cos\pi r\, dr = 2\pi \left[\frac{r\sin\pi r}{\pi} \Big|_0^1 - \frac{1}{\pi} \int\limits_0^1 \sin \pi r\, dr \right] = -\frac{4}{\pi}.$$

Формула (46.32) замены переменного в интеграле может быть получена и для более общего случая, в частности, когда якобиан отображения обращается в ноль в области интегрирования, а интегрируемая функция имеет разрывы. Если множества указанных точек

имеют меру ноль и отображаются также в множестве меры ноль, причем эти множества разбивают области интегрирования G и G^* на конечное число открытых множеств, на каждом из которых интегрируемая функция продолжаема до непрерывной вплоть до границы функции, то формула (46.32) в этом случае непосредственно следует из доказанного выше.

46.3. Криволинейные координаты

Формулы

$$x = x(u, v),\quad y = y(u, v) \tag{46.47}$$

можно рассматривать не только как отображение, но и как переход от одной системы координат к другой, вообще говоря, криволинейной. Поясним прежде всего понятие криволинейной системы координат.

Пусть G — некоторое открытое множество на плоскости E^2_{xy} и каждой точке $M = (x, y) \in G$, а значит, и каждой упорядоченной паре чисел (x, y), являющейся координатами точки M в выбранной прямоугольной системе координат, поставлена в соответствие пара чисел (u, v) таким образом, что разным точкам M_1 и M_2 соответствуют разные пары (u_1, v_1) и (u_2, v_2). В этом случае говорят, что на множестве G задана система координат u, v, при этом если точке M соответствует пара (u, v), то пишут $M = (u, v)$. Каждая пара (u, v) является функцией точки $M \in G$, поэтому и каждый ее элемент u и v также является функцией точки M: $u = u(M)$, $v = v(M)$, или ее декартовых координат:

$$u = u(x, y),\quad v = v(x, y). \tag{46.48}$$

Обратно, каждой паре (u, v) из рассматриваемого множества пар соответствует точка $M \in G$, т. е. точка M есть функция пар (u, v): $M = M(u, v)$, а поэтому ее декартовы координаты x и y также являются функциями указанных пар (u, v). Иначе говоря, справедливы формулы (46.47), задающие отображение, обратное отображению (46.48).

Геометрическое место точек $(x, y) \in G$, удовлетворяющих условию $u(x, y) = u_0$ и соответственно $v(x, y) = v_0$, где u_0 и v_0 — некоторые фиксированные постоянные, называется *координатными линиями* в системе координат u, v.

Используя формулы (46.47), координатные линии можно записать в виде

$$x = x(u_0, v), \quad y = y(u_0, v), \tag{46.49}$$

соответственно в виде

$$x = x(u, v_0), \quad y = y(u, v_0). \tag{46.50}$$

В случае декартовых координат координатные линии суть прямые, в общем же случае — некоторые кривые, задаваемые представлениями (46.49) и (46.50). Этим и объясняется название «криволинейные координаты» (рис. 144).

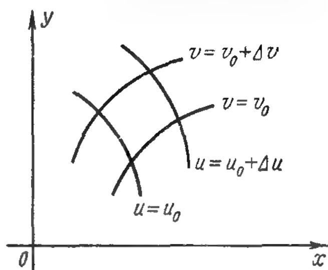


Рис. 144

Будем предполагать, что функции (46.47) удовлетворяют на G всем условиям, при которых была выведена формула (46.32) замены переменного в интеграле, в частности, что они непрерывно дифференцируемы, и что якобиан $\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}$ не равен нулю на G. В силу этого координатные линии в окрестности каждой точки из G являются непрерывно дифференцируемыми кривыми.

Посмотрим, какой смысл будет иметь в этом случае модуль якобиана. Зафиксируем какие-либо значения u_0, Δu, v_0, Δv. Пусть $M_0 = (u_0, v_0)$, Γ — множество всех точек, координаты u, v которых удовлетворяют неравенствам $u_0 < u < u_0 + \Delta u$, $v_0 < v < v_0 + \Delta v$, и пусть $\overline{\Gamma} \subset G$. Множество Γ называется *координатным* (*криволинейным*) *параллелограммом*. Множество Γ открыто (почему?) и его граница представляет собой кусочно-гладкий контур (он состоит из кривых вида $x = x(u_0, v)$, $y = y(u_0, v)$, где $v_0 \leqslant v \leqslant v_0 + \Delta v$ и т. п.), поэтому Γ — квадрируемая область. Вычислим ее площадь (см. рис. 144). Применяя формулу замены переменного в интеграле и интегральную теорему о среднем (см. п. 44.5), получим

$$\operatorname{mes}\Gamma = \iint\limits_{\Gamma} dx\,dy = \iint\limits_{\substack{u_0 < u < u_0+\Delta u\\ v_0 < v < v_0+\Delta v}} \left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| du\,dv =$$

$$= \left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|_M \int\limits_{u_0}^{u_0+\Delta u} du \int\limits_{v_0}^{v_0+\Delta v} dv = \left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|_M \Delta u\,\Delta v, \quad M \in \Gamma.$$

В силу непрерывной дифференцируемости функций (46.47)

$$\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|_M = \left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|_{M_0} + \varepsilon,$$

где $\lim\limits_{\Delta u^2+\Delta v^2\to 0} \varepsilon = 0$. Таким образом,

$$\operatorname{mes}\Gamma = \left|\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}\right|_{M_0} \Delta u\,\Delta v + \varepsilon\,\Delta u\,\Delta v. \qquad (46.51)$$

Формула (46.51) показывает, что модуль якобиана в точке (u_0, v_0) представляет собой коэффициент у главной части площади координатного параллелограмма с вершиной в точке (u_0, v_0) относительно произведения $\Delta u\,\Delta v$ при $\Delta u^2 + \Delta v^2 \to 0$.

Это замечание часто используется на практике при вычислении якобиана преобразования криволинейных координат в декартовы. Покажем это на примере полярных координат r, φ. Зафиксируем какие-либо значения r, $r+\Delta r$, φ и $\varphi+\Delta\varphi$ и рассмотрим координатный параллелограмм Γ (рис. 145), образованный координатными линиями r, $r+\Delta r$, φ и $\varphi+\Delta\varphi$. Длины двух его сторон равны соответственно Δr и $r\Delta\varphi$. Вычисляя площадь этого параллелограмма так, как если бы он был обыкновенным прямоугольником, получим

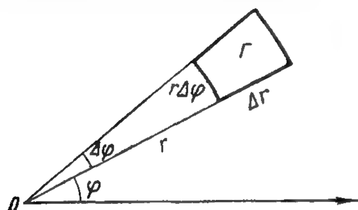


Рис. 145

$$\operatorname{mes}\Gamma \approx r\,\Delta r\,\Delta\varphi.$$

Таким образом, коэффициент у произведения $\Delta r\Delta\varphi$ оказался равным r, откуда естественно ожидать, что $\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = r$. В действительности (см. пример в п. 46.2) так и есть. Это произошло потому, что при наших неточных вычислениях площади Γ допущена ошибка более высокого порядка малости, чем произведение $\Delta r\Delta\varphi$ при $\Delta r^2 + \Delta\varphi^2 \to 0$.

Действительно, вычисляя $\operatorname{mes}\Gamma$ как разность площадей двух секторов, получим

$$\operatorname{mes}\Gamma = \frac{\Delta\varphi}{2\pi}\pi(r+\Delta r)^2 - \frac{\Delta r}{2\pi}\pi^2 = r\Delta r\Delta\varphi + \frac{1}{2}\Delta r^2\Delta\varphi.$$

46.4. Замена переменных в n-кратном интеграле

Все сказанное в предыдущих пунктах этого параграфа вместе с доказательством переносится и на n-мерный случай, поэтому мы ограничимся лишь формулировкой соответствующих теорем.

Теорема 3. *Пусть $G_x \subset E_x^n$ и $G_t \subset E_t^n$ — открытые множества, $x = F(t) = \{x_i = x_i(t_1, \dots, t_n),\ i = 1, 2, \dots, n\}$ — взаимно однозначное непрерывно дифференцируемое отображение G_t на G_x,*

якобиан $J(t)=\frac{\partial(x_1, \ldots, x_n)}{\partial(t_1, \ldots, t_n)}$ *которого не равен нулю на* G_t. *Пусть далее* S—n-*мерный куб*:

$$S=\{(t_i): t_i^{(0)} \leqslant t_i \leqslant t_i^{(0)}+h, \quad i=1, 2, \ldots, n\} \subset G_t, \ t^{(0)}=\left(t_i^{(0)}\right).$$

Тогда

$$\lim_{h \to 0} \frac{\operatorname{mes} F(S)}{\operatorname{mes} S}=|J(t^{(0)})|;$$

при этом, если

$$\frac{\operatorname{mes} F(S)}{\operatorname{mes} S}=|J(t^{(0)})|+\varepsilon(t^{(0)}, h),$$

то для любого ограниченного замкнутого множества A, $t^{(0)} \in A \subset G_t$, *функция* $\varepsilon(t^{(0)}, h)$ *равномерно стремится к нулю на* A *при* $h \to 0$

Теорема 4. *Пусть* G_x *и* G_t — *кубируемые открытые множества,* $G_x \subset E_x^n$, $G_t \subset E_t^n$. *Пусть* $x=F(t)=\{x_i=x_i(t_1, \ldots, t_n), i=1, 2, \ldots, n\}$—*непрерывное отображение* $\overline{G}_t$ *на* $\overline{G}_x$, *взаимно однозначно и непрерывно дифференцируемо отображающее* G_t *на* G_x, *и пусть якобиан* $J(t)=\frac{\partial(x_1, \ldots, x_n)}{\partial(t_1, \ldots, t_n)}$ *этого отображения не обращается в ноль на* G_t *и непрерывно продолжаем на* $\overline{G}_t$. *Тогда если функция* $f(x)$ *непрерывна на множестве* $\overline{G}_x$, *то*

$$\int f(x)\, dG_x=\int f\left(x(t)\right)|J(t)|\, dG_t.$$

Упражнение 1. Написать формулы замены переменных в тройных интегралах для преобразований координат:

1) $x=r \cos\psi \cos\varphi, \quad y=\cos\psi \sin\varphi, \quad z=r\sin\psi,$

$$0 \leqslant r<\infty, \quad 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi, \quad -\frac{\pi}{2} \leqslant \psi \leqslant \frac{\pi}{2}$$

(сферические координаты);

2) $x=r\cos\varphi, \quad y=r\sin\varphi, \quad z=z,$

$$0 \leqslant r<+\infty, \quad 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi, \quad -\infty<z<+\infty$$

(цилиндрические координаты).

§ 47. КРИВОЛИНЕЙНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

47.1. Криволинейные интегралы первого рода

Пусть в трехмерном пространстве E^3 задана спрямляемая ориентированная кривая γ, пусть $r(s)=\{x(s), y(s), z(s); 0 \leqslant s \leqslant S\}$ —ее представление, где за параметр взята переменная длина дуги s,

пусть $A = r(0)$ и $B = r(S)$ — начальная и конечная точки этой кривой. В этом случае будем писать $\gamma = \overset{\frown}{AB}$. Противоположно ориентированную кривую обозначим $\overset{\frown}{BA}$.

Пусть, далее, на точках $r(s)$ кривой γ задана некоторая функция, которую обозначим $F(r(s)) = F(x(s), y(s), z(s))$, чисто условно будет обозначать ее также символом: $F(x, y, z)$, хотя она, вообще говоря, и не является однозначной функцией точки (x, y, z). Это означает, что если некоторая точка M пространства E^3 является точкой самопересечения кривой, т. е. существуют по крайней мере два значения параметра s_1 и s_2, такие, что $r(s_1) = r(s_2) = M$, то значения функции F в точках $r(s_1)$ и $r(s_2)$ кривой γ, вообще говоря, различны. Иначе говоря, функцию F нельзя рассматривать просто как однозначную функцию, определенную на некотором множестве трехмерного пространства.

Такая точка зрения соответствует физической интерпретации кривой γ, например, как траектории движения материальной точки, а функции F как некоторой силы, воздействующей на нее, которая зависит не только от положения точки в пространстве, но и от момента, в котором она находится в данном месте.

Определение 1. *Значение выражения* $\int\limits_{\overset{\frown}{AB}} F(x, y, z)\,ds$, *определяемое по формуле*

$$\int\limits_{\overset{\frown}{AB}} F(x, y, z)\,ds = \int\limits_0^S F\big(x(s),\ y(s),\ z(s)\big)\,ds, \tag{47.1}$$

называется криволинейным интегралом первого рода от функции F по кривой $\overset{\frown}{AB}$.

Этот интеграл обозначается также символами

$$\int\limits_{\overset{\frown}{AB}} F[r(s)]\,ds \quad и \quad \int\limits_{\gamma} F[r(s)]\,ds, \ \text{ или, короче, } \int F\,ds.$$

Таким образом, хотя определение криволинейного интеграла первого рода и связано с определенными геометрическими образами, оно сводится к обычному интегралу по отрезку, и поэтому на криволинейный интеграл переносятся все свойства обычного интеграла.

Отметим некоторые специфические свойства интеграла (47.1).

1. $\int\limits_{\overset{\frown}{AB}} ds = S.$

Это очевидно.

2. *Если функция F непрерывна в точках кривой γ, как функция параметра s, т. е. если непрерывна функция $F[r(s)]$, $0 \leqslant s \leqslant S$, то интеграл $\int\limits_{\gamma} F\,ds$ существует.*

В самом деле, согласно определению (47.1), интеграл $\int\limits_{\gamma} F ds$ сводится к интегралу $\int\limits_0^S F[x(s),\ y(s),\ z(s)]ds$ от непрерывной функции по отрезку, который, как известно, существует.

3. *Криволинейный интеграл первого рода не зависит от ориентации кривой*

$$\int\limits_{\overset{\frown}{AB}} F(x, y, z)\, ds = \int\limits_{\overset{\frown}{BA}} F(x, y, z)\, ds.$$

Действительно, пусть $M = r(s)$ — точка кривой и $s =$ дл. $\overset{\frown}{AM}$. Если $\sigma = S - s$, то $\sigma =$ дл. $\overset{\frown}{BM}$ (рис. 146). Функция $r = r(S - \sigma)$, $0 \leqslant \sigma \leqslant S$, является представлением кривой $\overset{\frown}{BA}$, поэтому, делая в интеграле (47.1) замену переменного $s = S - \sigma$, получим

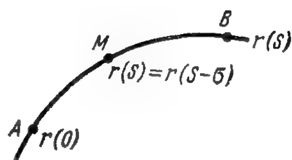


Рис. 146

$$\int\limits_{\overset{\frown}{AB}} F(x, y, z)\, ds = \int\limits_0^S F[x(s),\ y(s),\ z(s)]\, ds =$$

$$= \int\limits_0^S F[x(S-\sigma),\ y(S-\sigma),\ z(S-\sigma)]\, d\sigma = \int\limits_{\overset{\frown}{BA}} F(x, y, z)\, d\sigma.$$

Прежде чем перейти к следующему свойству, заметим, что интеграл $\int\limits_{\gamma} F ds$, как и всякий интеграл, является пределом соответствующих интегральных сумм; специфика этого случая состоит лишь в том, что эти суммы можно описать в геометрических терминах, связанных с кривой γ, по которой ведется интегрирование. Сформулируем это более точно.

4. *Пусть* $\tau = \{s_i\}_{i=0}^{i=i_0}$ — *разбиение отрезка* $[0, S]$, $\xi_i \in [s_{i-1}, s_i]$, $i = 1, 2, \ldots, i_0$, Δs_i — *длина части кривой* γ *от точки* $r(s_{i-1})$ *до точки* $r(s_i)$ *и* $\sigma_\tau = \sum\limits_{i=1}^{i_0} F[r(\xi_i)]\, \Delta s_i$. *Тогда, если функция* $F\big[r(s)\big]$ *интегрируема по Риману на отрезке* $[0, S]$, *то*

$$\lim_{\delta_\tau \to 0} \sigma_\tau = \int\limits_{\gamma} F\, ds. \tag{47.2}$$

Действительно, σ_τ очевидно, является интегральной суммой Римана интеграла $\int\limits_0^S F[r(s)]ds$, и потому формула (47.2) непосредственно следует из формулы (47.1).

Формула (47.1) очень удобна для изучения свойств интеграла $\int\limits_\gamma F ds$, однако она далеко не всегда удобна для его вычисления, так как нередко бывает очень сложно или даже практически невозможно найти представление данной кривой, где за параметр взята переменная длина дуги. Укажем поэтому формулу для интеграла $\int\limits_\gamma F ds$ при любом параметрическом представлении кривой γ.

5. *Пусть γ — непрерывно дифференцируемая кривая,*

$$r(t)=\{\varphi(t),\ \psi(t),\ \chi(t);\ a\leqslant t\leqslant b\}$$

— ее непрерывно дифференцируемое представление,

$$\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)+\chi'^2(t)>0,\quad a\leqslant t\leqslant b^{*)}$$

и пусть функция F непрерывна на кривой γ (в том смысле, что функция $F[r(t)]$ непрерывна на отрезке $[a, b]$), тогда

$$\int\limits_\gamma F(x, y, z)\,ds=\int\limits_a^b F[\varphi(t), \psi(t), \chi(t)]\sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)+\chi'^2(t)}\,dt. \quad (47.3)$$

В самом деле, при сделанных предположениях кривая γ спрямляема и переменную длину дуги $s=s(t)$ можно принять за параметр, и потому интеграл $\int\limits_\gamma F ds$ имеет смысл. Делая замену переменного $s=s(t)$ в правой части равенства (47.1) и вспоминая, что (см. п. 16.3)

$$\frac{ds}{dt}=\sqrt{x_t'^2+y_t'^2+z_t'^2},$$

получим формулу (47.3).

Из формулы (47.3) следует, что для данной кривой значение интеграла, стоящего в правой части равенства (47.3), не зависит от выбора параметра на кривой, ибо при любом выборе параметра этот интеграл равен интегралу, стоящему в левой части этого равенства.

47.2. Криволинейные интегралы второго рода

Ряд математических и прикладных задач приводит к криволинейным интегралам другого типа. Например, если $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(t)$ является радиус-вектором движущейся материальной точки, а вектор $\boldsymbol{F}=\boldsymbol{F}(t)$ выражает собой силу, действующую на данную ма-

*) Таким образом предполагается, что на кривой γ нет особых точек.

териальную точку, то естественно определить работу силы $\boldsymbol{F}$ вдоль траектории γ рассматриваемой точки, как интеграл

$$\int_{\gamma} \boldsymbol{F}\, d\boldsymbol{r}$$

или, если $\boldsymbol{F} = (P, Q, R)$, а $d\boldsymbol{r} = (dx, dy, dz)$, в координатной записи, как интеграл

$$\int P\, dx + Q\, dy + R\, dz. \tag{47.4}$$

Вспоминая, что (см. п. 16.3)

$$\frac{dx}{ds} = \cos\alpha, \quad \frac{dy}{ds} = \cos\beta, \quad \frac{dz}{ds} = \cos\gamma, \tag{47.5}$$

где $\boldsymbol{t} = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$ — единичный касательный вектор, интеграл (47.4) формально можно переписать в виде

$$\int (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)\, ds.$$

Сформулируем теперь строгое определение интегралов вида (47.4).

Пусть $\gamma = \widehat{AB}$ — непрерывно дифференцируемая ориентированная кривая без особых точек. Тогда существует такое ее непрерывно дифференцируемое представление

$$r(t) = \{\varphi(t), \psi(t), \chi(t);\ a \leqslant t \leqslant b\}, \quad A = r(a), \quad B = r(b),$$

что

$$\varphi'^2(t) + \psi'^2(t) + \chi'^2(t) > 0, \quad a \leqslant t \leqslant b.$$

Пусть $s = s(t)$ — переменная длина дуги, $0 \leqslant s \leqslant S =$ дл. γ, отсчитываемая от конца A или B, $(\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$ — единичный касательный вектор к кривой, $\alpha = \alpha(s)$, $\beta = \beta(s)$, $\gamma = \gamma(s)$, $0 \leqslant s \leqslant S$, и пусть функция F как и в предыдущем пункте, определена на множестве $\{r(t), a \leqslant t \leqslant b\}$ точек кривой γ.

Определение 2. *Выражение* $\int\limits_{\widehat{AB}} F(x, y, z)\, dx$ *определяется по формуле*

$$\int\limits_{\widehat{AB}} F(x, y, z)\, dx = \int\limits_{\widehat{AB}} F(x, y, z)\cos\alpha\, ds. \tag{47.6}$$

Аналогично по определению полагается

$$\left.\begin{aligned} \int\limits_{\widehat{AB}} F(x, y, z)\, dy &= \int\limits_{\widehat{AB}} F(x, y, z)\cos\beta\, ds, \\ \int\limits_{\widehat{AB}} F(x, y, z)\, dz &= \int\limits_{\widehat{AB}} F(x, y, z)\cos\gamma\, ds. \end{aligned}\right\} \tag{47.7}$$

Интегралы вида (47.6) *и* (47.7) *называются криволинейными интегралами второго рода от функции* F *по кривой* $\widehat{AB}$.

Естественность этих определений видна из формул (47.5).

Отметим некоторые свойства этих интегралов, ограничиваясь для краткости только случаем интеграла (47.6).

1. *Если функция* F *непрерывна на кривой* γ, *т. е. непрерывна функция* $F[r(t)]$, $a \leqslant t \leqslant b$, *то интеграл* (47.6) *существует.*

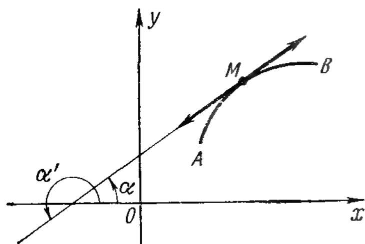


Рис. 147

Действительно, при сделанных относительно кривой γ предположениях функция $t = t(s)$, (t — параметр на кривой γ, s — переменная длина дуги) непрерывно дифференцируема на отрезке $[0, S]$, поэтому функция $\cos\alpha = \frac{dx}{dt} \cdot \frac{dt}{ds}$ непрерывна на этом отрезке и, следовательно, в силу свойства 2 криволинейных интегралов первого рода (см. п. 47.1) интеграл (47.6) существует.

В дальнейшем в этом пункте для простоты будем предполагать, что функция F непрерывна на кривой γ.

2. *Криволинейный интеграл второго рода меняет знак при изменении ориентации кривой, т. е.*

$$\int\limits_{\widehat{AB}} F(x, y, z)\, dx = - \int\limits_{\widehat{BA}} F(x, y, z)\, dx.$$

В самом деле, если α — угол, образованный положительным направлением касательной к кривой $\widehat{AB}$ с осью Ox, а α' — угол, образованный положительным направлением касательной к кривой $\widehat{BA}$ с осью Ox, то для соответствующих точек будем иметь $\alpha' = \alpha + \pi$ (рис. 147) и, следовательно, $\cos\alpha' = -\cos\alpha$.

Используя теперь свойство независимости криволинейного интеграла первого рода от ориентации кривой (см. п. 47.1), получим

$$\int\limits_{\widehat{BA}} F(x, y, z)\, dx = \int\limits_{\widehat{BA}} F(x, y, z) \cos\alpha'\, ds = - \int\limits_{\widehat{BA}} F(x, y, z) \cos\alpha\, ds =$$
$$= - \int\limits_{\widehat{AB}} F(x, y, z) \cos\alpha\, ds = - \int\limits_{\widehat{AB}} F(x, y, z)\, dx.$$

3. *Для интеграла* (47.6) *справедлива формула*

$$\int\limits_{\widehat{AB}} F(x, y, z)\, dx = \int\limits_a^b F[\varphi(t), \psi(t), \chi(t)]\, \varphi'(t)\, dt. \tag{47.8}$$

Действительно, согласно определению (47.6),

$$\int\limits_{\overset{\frown}{AB}} F(x, y, z)\,ds = \int\limits_0^S F[x(s),\ y(s),\ z(s)]\cos\alpha(s)\,ds.$$

Делая в интеграле, стоящем в правой части этого равенства, замену переменного $s = s(t)$ и замечая, что (см. 47.5)

$$\cos\alpha = \frac{dx}{ds} = \frac{x_t'}{s_t'},$$

получим

$$\int\limits_0^S F[x(s),\ y(s),\ z(s)]\cos\alpha(s)\,ds =$$

$$= \int\limits_a^b F[\varphi(t),\ \psi(t),\ \chi(t)]\,\frac{x_t'}{s_t'}\,s_t'\,ds =$$

$$= \int\limits_a^b F[\varphi(t),\ \psi(t),\ \chi(t)]\,\varphi_t'(t)\,dt,$$

что и доказывает формулу (47.8).

Отметим, что мы доказали также, что интеграл, стоящий в правой части этой формулы, не зависит от выбора параметра на кривой.

В частном случае, когда за параметр t можно взять переменную x, т. е. когда кривая γ имеет представление

$$y = y(x), \quad z = z(x), \quad a \leqslant x \leqslant b,$$

формула (47.8) принимает вид

$$\int\limits_{\gamma} F(x, y, z)\,dx = \int\limits_a^b F[x, y(x), z(x)]\,dx. \tag{47.9}$$

4. *Интеграл* $\int\limits_{\overset{\frown}{AB}} F(x, y, z)\,dx$ *является пределом соответствующих интегральных сумм, описываемых в терминах, связанных с кривой* γ, *точнее: пусть* $\tau = \{t_i\}_{i=0}^{i=i_0}$ — *разбиение отрезка* $[a, b]$, $\xi_i \in [t_{i-1}, t_i]$, $i = 1, 2, \ldots, i_0$, *и*

$$\widetilde{\sigma}_\tau = \sum_{i=1}^{i_0} F[r(\xi_i)]\,\Delta x_i,$$

где $\Delta x_i = x(t_i) - x(t_{i-1})$, *тогда*

$$\lim_{\delta_\tau \to 0} \widetilde{\sigma}_\tau = \int\limits_{\overset{\frown}{AB}} F(x, y, z)\,dx. \tag{47.10}$$

В самом деле, по теореме о среднем $\Delta x = x'(\eta_i)\,\Delta t_i$, где

$$\eta_i \in [t_{i-1}, t_i], \quad \Delta t_i = t_i - t_{i-1}, \quad i = 1, 2, \ldots, i_0,$$

поэтому

$$\tilde{\sigma}_\tau = \sum_{i=1}^{i_0} F[r(\xi_i)]\varphi'(\eta_i)\,\Delta t_i.$$

Положим

$$\sigma_\tau = \sum_{i=1}^{i_0} F[r(\xi_i)]\,\varphi'(\xi_i)\,\Delta t_i.$$

Сумма σ_τ является интегральной суммой Римана для функции $F[r(t)]\,\varphi'(t)$, поэтому

$$\lim_{\delta_\tau \to 0} \sigma_\tau = \int_a^b F[r(t)]\,\varphi'(t)\,dt. \tag{47.11}$$

С другой стороны,

$$\left|\tilde{\sigma}_\tau - \sigma_\tau\right| \leqslant \sum_{i=1}^{i_0} |F[r(\xi_i)]|\,|\varphi'(\eta_i) - \varphi'(\xi_i)|\,\Delta t_i \leqslant$$
$$\leqslant \omega(\delta_\tau; \varphi')(b-a) \sup_{a<t<b} |F[r(t)]|,$$

где $\omega(\delta; \varphi')$ — модуль непрерывности функции φ'. Так как из непрерывности функции $F[r(t)]$ на отрезке $[a, b]$ следует, что $\sup\limits_{a<t<b} |F[r(t)]| < \infty$, а из непрерывности функции φ' на том же отрезке следует, что $\lim\limits_{\delta_\tau \to 0} \omega(\delta_\tau; \varphi') = 0$, то $\lim\limits_{\delta_\tau \to 0} \left(\tilde{\sigma}_\tau - \sigma_\tau\right) = 0$. Поэтому в силу (47.11) получим

$$\lim_{\delta_\tau \to 0} \tilde{\sigma}_\tau = \int_a^b F[r(t)]\,\varphi'(t)\,dt.$$

Отсюда, согласно свойству 3, и следует формула (47.10).

Мы остановились только на тех свойствах криволинейных интегралов, которые связаны со спецификой их определения, с кривой, по которой производится интегрирование. Естественно, что, поскольку рассматриваемые интегралы сводятся к обычным интегралам по отрезку, на них переносятся и различные их свойства (линейность относительно интегрируемых функций, интегральная теорема о среднем и т. п.).

47.3. Расширение класса допустимых преобразований параметра кривой

Непрерывно дифференцируемая ориентированная кривая без особых точек определялась нами (см. п. 16.1 и 16.2) как кривая, имеющая непрерывно дифференцируемые представления $r(t)$, $a \leqslant t \leqslant b$, такие, что $r'(t) \neq 0$ на отрезке $[a, b]$. В качестве допустимых преобразований параметра при этом рассматривались такие функции

$$t = t(\tau), \quad \alpha \leqslant \tau \leqslant \beta, \quad t(\alpha) = a, \quad t(\beta) = b,$$

которые были непрерывно дифференцируемы и имели положительную производную на отрезке $[a, b]$. Это требование, однако, часто оказывается слишком обременительным. Например, для дуги γ единичной окружности с центром в начале координат представления

$$y = \sqrt{1 - x^2}, \quad 0 \leqslant x \leqslant 1,$$

и

$$x = \cos t, \quad y = \sin t, \quad 0 \leqslant t \leqslant \frac{\pi}{2},$$

оказываются неэквивалентными в этом смысле. Да и само представление $y = \sqrt{1 - x^2}$, $0 \leqslant x \leqslant 1$, не определяет в нашем смысле непрерывно дифференцируемую кривую, поскольку при $x = 1$ производная не существует. Поэтому естественно расширить класс допустимых преобразований параметров и допустимых представлений непрерывно дифференцируемых кривых. Это можно сделать следующим образом.

Рассмотрим совокупность представлений $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t)$, $a \leqslant t \leqslant b$, непрерывных на отрезке $[a, b]$ и непрерывно дифференцируемых на интервале (a, b). *Допустимым преобразованием параметра* будем называть всякую функцию $t = t(\tau)$, $\alpha \leqslant \tau \leqslant \beta$, $t(\alpha) = a$, $t(\beta) = b$, непрерывную на отрезке $[\alpha, \beta]$, непрерывно дифференцируемую и имеющую положительную производную на интервале (α, β). Как всегда, два представления называются *эквивалентными*, если можно перейти от одного к другому с помощью допустимого преобразования параметра.

Определение 3. *Класс эквивалентных представлений указанного типа задает непрерывно дифференцируемую кривую, если в этом классе существует по крайней мере одно представление $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t)$, $a \leqslant t \leqslant b$, непрерывно дифференцируемое на всем отрезке $[a, b]$.*

Определение 4. *Непрерывно дифференцируемая кривая называется кривой без особых точек, если при некотором ее представлении*

$\mathbf{r}(t)$, $a \leqslant t \leqslant b$ *(а значит, и при всех представлениях) выполняется условие* $\mathbf{r}'(t) \neq 0$, $a < t < b$.

В смысле этого определения два вышеуказанные представления дуги окружности оказываются эквивалентны и задают непрерывно дифференцируемую кривую.

Остаются в силе и все данные выше определения криволинейных интегралов и их свойства, естественно, при учете того, что при некоторых представлениях кривых мы можем получить несобственный интеграл.

Следует подчеркнуть, что расширение класса представлений кривой позволяет производить вычисление криволинейного интеграла при более разнообразных представлениях кривой. Например, интеграл $\int\limits_{\gamma} P(x, y)dy$, где γ — рассматриваемая выше дуга единичной окружности, а P — непрерывная на γ функция, можно вычислить, пользуясь обоими указанными представлениями:

$$\int\limits_{\gamma} P(x, y)\,dy = -\int\limits_{0}^{1} P\left(x, \sqrt{1-x^2}\right)\frac{x\,dx}{\sqrt{1-x^2}},$$

$$\int\limits_{\gamma} P(x, y)\,dy = -\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} P(\cos t, \sin t)\sin t\,dt.$$

В первом случае здесь может получиться несобственный интеграл.

Вместе с тем при доказательстве теорем можно выбирать «хорошие представления», т. е. непрерывно дифференцируемые вплоть до концов отрезка, так что проведенные выше рассмотрения оказываются справедливыми и для расширенного понятия кривой.

Упражнение 1. Доказать, что при новом определении непрерывно дифференцируемой кривой γ без особых точек ее длина выражается формулой $\int\limits_{a}^{b}\sqrt{x'^2+y'^2+z'^2}\,dt$, где написанный интеграл, вообще говоря, несобственный.

47.4. Криволинейные интегралы по кусочно-гладким кривым

Определение 5. *Если кривая γ кусочно-гладкая, т. е. представима как сумма конечного числа гладких кривых $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_k$, а функция $F(x, y, z)$ по-прежнему определена на точках кривой γ, то по определению положим*

$$\int\limits_{\gamma} F(x, y, z)\,dx = \sum_{i=1}^{k}\int\limits_{\gamma_i} F(x, y, z)\,dx.$$

Если γ — кусочно-гладкая кривая и $x=x(t)$, $y=y(t)$, $z=z(t)$, $a \leqslant t \leqslant b$, — ее кусочно-гладкое представление, то также будем писать

$$\int_\gamma F(x, y, z)\,dx = \int_a^b F[x(t), y(t), z(t)]\,x'(t)\,dt$$

(здесь $x'(t)$ может быть не определена в конечном числе точек отрезка $[a, b]$), понимая интеграл, стоящий в правой части равенства, вообще говоря, в несобственном смысле.

Аналогичные определения имеют место и для интегралов вида (47.7). В дальнейшем придется иметь дело с суммами интегралов вида (47.6) и (47.7), т. е. с интегралами вида (47.4), где P, Q и R — некоторые функции, определенные на точках кривой γ. Согласно определениям (47.6) и (47.7), справедлива формула

$$\int_\gamma P\,dx + Q\,dy + R\,dz = \int_\gamma (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)\,ds.$$

З а м е ч а н и е 1. Если Γ обозначает конечную совокупность кусочно-гладких ориентированных кривых γ_i, $i = 1, 2, \ldots, k$, то по определению

$$\int_\Gamma F\,ds = \sum_{i=1}^{k} \int_{\gamma_i} F\,ds, \quad \int_\Gamma F\,dx = \sum_{i=1}^{i} \int_{\gamma_i} F\,dx \text{ и т. д.}$$

З а м е ч а н и е 2. Мы дали определение криволинейных интегралов для кривых, лежащих в трехмерном пространстве E^3. Совершенно аналогично они определяются и для кривых, лежащих в любом n-мерном пространстве E^n, $n = 2, 3, 4, \ldots$. Криволинейные интегралы в n-мерном пространстве обладают свойствами, аналогичными рассмотренным выше в трехмерном случае, причем доказательства их также совершенно аналогичны приведенным выше. Поэтому мы не будем останавливаться ни на формулировках, ни на доказательствах соответствующих утверждений.

47.5. Формула Грина

Определение 6. *Пусть простой замкнутый контур γ является границей ограниченной плоской области G. Если ориентация контура выбрана таким образом, что при обходе контура γ, соответствующем возрастанию параметра, область G остается слева (такой обход обычно называется обходом контура против часовой стрелки), то эта ориентация называется положительной, в противном же случае (т. е. когда обход контура производится по часовой стрелке) — отрицательной (рис. 148).*

Положительно ориентированный контур будем обозначать γ^+, а отрицательно ориентированный — через γ^-. Эти понятия определены не строго, не в точных математических терминах. Однако мы не будем давать здесь точных определений, с одной стороны, потому, что это нельзя коротко сделать, а с другой стороны, поскольку в дальнейшем во всяком отдельном случае рассматриваемая ориентация всегда будет конкретно указываться. Тем самым наше «общее» определение положительной и отрицательной ориентации простого замкнутого контура послужит лишь для геометрической наглядности рассматриваемых ниже вопросов.

Теорема 1 (формула Грина). *Пусть G — плоская область и ее граница γ является кусочно-гладким контуром. Пусть область G может быть разбита на конечное число элементарных относительно обеих координатных осей* (см. п. 45.1) *областей G_i**), *с кусочно-гладкими границами γ_i, $i = 1, 2, \ldots, k$. Пусть, далее, в замкнутой области $\overline{G}$ заданы функции $P(x, y)$ и $Q(x, y)$, непрерывные на $\overline{G}$ вместе со своими частными производными $\frac{\partial P}{\partial y}$ и $\frac{\partial Q}{\partial x}$***). *Тогда справедлива формула*

$$\iint\limits_G \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\,dy = \int\limits_{\gamma^+} P\,dx + Q\,dy. \qquad (47.12)$$

Доказательство. Пусть сначала область G сама элементарна относительно осей Ox и Oy, и, следовательно, ее границу можно представить как объединение графиков двух кусочно-непрерывно дифференцируемых функций $\varphi(x)$ и $\psi(x)$, $\varphi(x) \leqslant \psi(x)$, $a \leqslant x \leqslant b$, и, быть может, отрезков прямых $x = a$ и $x = b$, а также как объединение двух графиков кусочно непрерывно дифференцируемых функций $\alpha(y)$ и $\beta(y)$, $\alpha(y) \leqslant \beta(y)$, $c \leqslant y \leqslant d$, и, быть может, отрезков прямых $x = c$ и $x = d$ (рис. 149).

В этом случае, применяя правило сведения двойного интеграла к повторному, теорему Ньютона — Лейбница (п. 29.3) и формулу (47.9), имеем

$$\iint\limits_G \frac{\partial P}{\partial y}\,dx\,dy = \int\limits_a^b \left[\int\limits_{\varphi(x)}^{\psi(x)} \frac{\partial P}{\partial y}\,dy\right] dx =$$

---

*) Это означает, что $\{G_i\}_{i=1}^{i=k}$ является разбиением области G (см. п. 44.3).

**) Непрерывность частных производных на $\overline{G}$ понимается так: эти производные непрерывны в G и непрерывно продолжаемы на границу G (см. п. 39.3).

$$= \int_a^b \{P[x, \psi(x)] - P[x, \varphi(x)]\} dx = \int_a^b P[x, \psi(x)] dx -$$

$$- \int_a^b P[x, \varphi(x)] dx = \int_{\overset{\frown}{DC}} P(x, y) dx - \int_{\overset{\frown}{AB}} P(x, y) dx =$$

$$= - \int_{\overset{\frown}{CD}} P(x, y) dx - \int_{\overset{\frown}{AB}} P(x, y) dx. \qquad (47.13)$$

Замечая, что для отрезков BC и DA

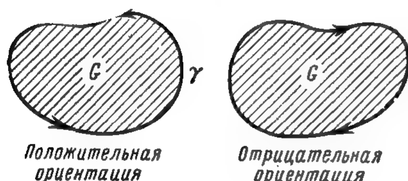


Рис. 148

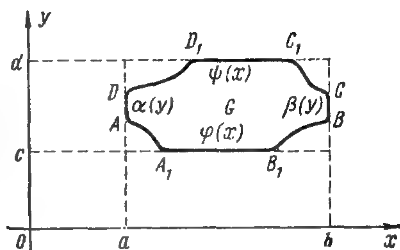


Рис. 149

$$\int_{BC} P(x, y) dx = \int_{DA} P(x, y) dx = 0 \qquad (47.14)$$

(это сразу следует, например, из формулы (47.8), ибо здесь $x = \text{const}$ и потому $dx \equiv 0$), и, складывая равенства (47.13) и (47.14), получим

$$\iint_G \frac{\partial P}{\partial y} dx\, dy = - \int_{\overset{\frown}{AB}} P\, dx - \int_{BC} P\, dx - \int_{\overset{\frown}{CD}} P\, dx - \int_{DA} P\, dx = - \int_{\gamma^+} P\, dx. \qquad (47.15)$$

При этом получилась ориентация граничного контура γ, при которой следуют последовательно одна за другой точки A, B, C, D. Эта ориентация называется положительной (см. определение 6) и обозначается γ^+.

Совершенно аналогично, исходя из того, что область G элементарна относительно оси Oy, выводится формула

$$\iint_G \frac{\partial Q}{\partial x} dx\, dy = \int_{\gamma^+} Q\, dy. \qquad (47.16)$$

Складывая (47.15) и (47.16), мы и получим формулу Грина (47.12) для рассматриваемого случая.

Рассмотрим общий случай. Пусть область G разбита на области G_i, $i = 1, 2, \ldots, k$, указанного в условиях теоремы вида. В силу доказанного для каждого $i = 1, 2, \ldots, k$

$$\iint\limits_{G_i} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\, dy = \int\limits_{\gamma_i^+} P\, dx + Q\, dy.$$

Сложим эти равенства:

$$\sum_{i=1}^{k} \iint\limits_{G_i} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\, dy = \sum_{i=1}^{k} \int\limits_{\gamma_i^+} P dx + Q dy. \tag{47.17}$$

В силу аддитивности двойного интеграла по множествам (см. п. 44.5)

$$\sum_{i=1}^{k} \iint\limits_{G_i} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\, dy = \iint\limits_{G} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\, dy.$$

В сумме, стоящей в правой части равенства (47.17), криволинейные интегралы берутся дважды по всем внутренним частям границ γ_i областей G_i, т. е. таким частям кривых γ_i, которые являются частью границ двух областей G_i, $i = 1, 2, \ldots, k$ и, следовательно, не входят в границу области G; при этом ориентации этих частей кривых γ_i противоположны (рис. 150). В силу изменения знака криволинейного интеграла второго рода при изменении ориентации кривой сумма двух криволинейных интегралов по указанным частям кривых γ_i равна нулю. Поэтому в правой сумме формулы (47.17) останутся только интегралы по положительно ориентированным частям границы γ области G, дающие в сумме $\int\limits_{\gamma^+} Pdx + Qdy$. Таким образом,

$$\sum_{i=1}^{k} \int\limits_{\gamma_i^+} P\, dx + Q\, dy = \int\limits_{\gamma^+} P\, dx + Q\, dy. \tag{47.18}$$

Из формул (47.17) и (47.18) и следует формула (47.12) в общем случае.

Теорема доказана.

Пусть G — ограниченная область на плоскости E^2 и пусть ее граница состоит из конечного числа простых контуров, которые будем называть *граничными контурами*. Если граничный контур является одновременно и границей неограниченной области, лежащей в $E^2 \setminus \overline{G}$, то будем называть его *внешним*, а если он является одновременно и границей ограниченной области, лежащей в $E^2 \setminus \overline{G}$, то — *внутренним*. Так, на рис. 151 контур γ_e внешний, а контуры γ_{i1} и γ_{i2} внутренние.

Если граница области G состоит из внешнего контура γ_e и внутренних контуров $\gamma_{i1}, \gamma_{i2}, \ldots, \gamma_{im}$ и если область G может быть разбита на конечное число элементарных относительно обоих координатных осей областей с кусочно-гладкими границами, то справедлива формула

$$\iint_G \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\, dy = \int_{\gamma_e^+} P\, dx + Q\, dy + \sum_{j=1}^{m} \int_{\gamma_{ij}^-} P\, dx + Q\, dy. \quad (47.19)$$

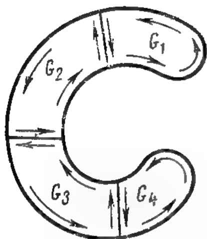


Рис. 150

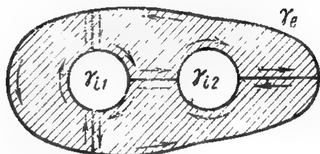


Рис. 151

Функции P и Q, как и выше, предполагаются непрерывными вместе со своими производными $\frac{\partial P}{\partial y}$ и $\frac{\partial Q}{\partial x}$ в замкнутой области $\overline{G}$.

Доказывается эта формула так же, как и формула (47.12), если только заметить, что в сумме, стоящей в правой части равенства (47.17), останутся криволинейные интегралы по положительно ориентированным частям внешнего контура и по отрицательно ориентированным частям внутренних контуров (рис. 151).

Отметим еще, что в формуле (47.19) все контуры (как внешние, так и внутренние) ориентированы таким образом, что при их обходе область интегрирования остается слева.

Определение 7. *Пусть граница ∂G ограниченной плоской области G состоит из конечного числа простых кусочно-гладких контуров. Совокупность этих контуров, ориентированных так, что при обходе по каждому из них область G остается слева (справа), называется положительной (отрицательной) ориентацией границы G и обозначается также ∂G (соответственно $-\partial G$).*

Формулу Грина можно распространить и на еще более широкий класс областей. Для этого заметим, что в силу доказанного формула Грина справедлива для треугольника, а значит, и для любого многоугольника. Поэтому предельным переходом, аппроксимируя границу конечнозвенными ломаными, можно получить формулу Грина для любой области (и даже просто открытого множества), граница ко-

торой состоит из конечного числа кусочно-гладких кривых. Мы, однако, не будем останавливаться на доказательстве этого факта, а ограничимся лишь его формулировкой. При этом, используя определение 7, мы запишем формулу (47.19) в более компактном виде.

Теорема 1'. *Пусть граница плоской ограниченной области G состоит из конечного числа кусочно-гладких кривых. Тогда, если функции P, Q, $\frac{\partial P}{\partial y}$ и $\frac{\partial Q}{\partial x}$ непрерывны на $\overline{G}$, то*

$$\iint_G \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\,dy = \int_{\partial G} P\,dx + Q\,dy,$$

где ∂G — положительно ориентированная граница области G.

47.6. Вычисление площадей с помощью криволинейных интегралов

Полагая в формуле Грина $Q = x$, $P = 0$, получим

$$\iint_G dx\,dy = \int_{\gamma^+} x dy$$

и, следовательно,

$$\text{mes}\, G = \int_{\gamma^+} x dy. \qquad (47.20)$$

Аналогично, полагая $P = -y$, $Q = 0$, получим

$$\text{mes}\, G = -\int_{\gamma^+} y dx. \qquad (47.21)$$

Складывая формулы (47.20) и (47.21), будем иметь

$$\text{mes}\, G = \frac{1}{2}\int_{\gamma^+} x dy - y dx. \qquad (47.22)$$

Найдем с помощью этой формулы в качестве примера площадь, ограниченную астроидой (см. в т. I рис. 61) $x = a\cos^3 t$, $y = a\sin^3 t$, $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$. Замечая, что здесь возрастание параметра t соответствует положительной ориентации контура, имеем

$$S = \frac{1}{2}\int_{\gamma^+} x dy - y dx = \frac{3a^2}{2}\int_0^{2\pi} (\cos^4 t \sin^2 t + \sin^4 t \cos^2 t)\, dt =$$

$$= \frac{3a^2}{8}\int_0^{2\pi} \sin^2 2t\, dt = \frac{3a^2}{16}\int_0^{2\pi} (1 - \cos 4t)\, dt = \frac{3\pi a^2}{8}.$$

47.7. Геометрический смысл знака якобиана отображения плоских областей

Пусть F — взаимно однозначное непрерывно дифференцируемое отображение плоской области $G \subset E^2_{uv}$ в плоскость E^2_{xy} с якобианом, всюду в G не равным нулю. Тогда в силу принципа сохранения области множество $G^* = F(G)$ также является областью (см. п. 41.5), а якобиан в силу его непрерывности сохраняет знак на G (см. теорему 4 в п. 19.4), т. е. либо всюду на G положителен, либо всюду отрицателен.

В координатной записи отображение F задается формулами

$$\left.\begin{aligned} x &= x(u, v), \\ y &= y(u, v), \end{aligned}\right\} \tag{47.23}$$

причем, если $M = (u, v)$, $M^* = (x, y)$, то $M^* = F(M)$.

Будем предполагать еще, что смешанные производные $\frac{\partial^2 y}{\partial v\,\partial u}$ и $\frac{\partial^2 y}{\partial u\,\partial v}$ непрерывны, а следовательно, и равны друг другу во всех точках G.

Пусть теперь γ — простой замкнутый кусочно-гладкий контур, расположенный в области G. Тогда (см. п. 46.2) $\gamma^* = F(\gamma)$ также является простым замкнутым кусочно-гладким контуром. Пусть контур γ является границей ограниченной области $\Gamma \subset G^*$, а контур γ^* — ограниченной области $\Gamma^* \subset G^*$. Пусть $\Gamma^* = F(\Gamma)$ и области Γ и Γ^* таковы, что к ним применима формула Грина, например, они удовлетворяют условиям, налагаемым на область в теореме 1. (На самом деле, как это уже отмечалось, при сделанных предположениях это всегда имеет место, однако это не было доказано.)

Пусть, наконец,

$$\begin{gathered} u = u(t), \\ v = v(t), \\ a \leqslant t \leqslant b, \end{gathered}$$

— представление контура γ^+, и, следовательно,

$$\begin{gathered} x = x[u(t),\ v(t)], \\ y = y[u(t),\ v(t)], \\ a \leqslant t \leqslant b, \end{gathered} \tag{47.24}$$

— некоторое представление контура γ^*.

Согласно формуле (47.20),

$$\operatorname{mes}\Gamma^* = \varepsilon \int\limits_{\gamma^*} x\,dy, \tag{47.25}$$

где $\varepsilon = +1$, если ориентация контура γ^* положительна, и $\varepsilon = -1$ в противоположном случае. Иначе говоря, $\varepsilon = +1$ (соответственно $\varepsilon = -1$), если положительному обходу данного контура γ соответствует при отображении (47.23) положительный же (соответственно отрицательный) обход контура $\gamma^* = F(\gamma)$.

Вычисляя интеграл (47.25) по формуле (47.8), используя представление (47.24) контура γ^*, получим

$$\operatorname{mes}\Gamma^* = \varepsilon \int\limits_a^b x y_t'\,dt = \varepsilon \int\limits_a^b x\left(\frac{\partial y}{\partial u}\frac{du}{dt} + \frac{\partial y}{\partial v}\frac{dv}{dt}\right)dt =$$

$$= \varepsilon \int\limits_{\gamma} x\frac{\partial y}{\partial u}\,du + x\frac{\partial y}{\partial v}\,dv.$$

К получившемуся интегралу применим формулу Грина (47.12) (здесь нами и используется потребованная выше непрерывность вторых производных $\frac{\partial^2 y}{\partial u\,\partial v}$ и $\frac{\partial^2 y}{\partial v\,\partial u}$). Полагая $P = x\frac{\partial y}{\partial u}$ и $Q = x\frac{\partial y}{\partial v}$ и замечая, что в этом случае

$$\frac{\partial Q}{\partial u} - \frac{\partial P}{\partial v} = \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial u} = \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)},$$

получим

$$\operatorname{mes}\Gamma^* = \varepsilon \int\limits_{\gamma^+} P\,du + Q\,dv = \varepsilon \iint\limits_{\Gamma}\left(\frac{\partial Q}{\partial u} - \frac{\partial P}{\partial v}\right)du\,dv =$$

$$= \varepsilon \iint\limits_{\Gamma} \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}\,du\,dv.$$

Левая часть получившегося равенства больше нуля, значит, правая часть также положительна, и так как якобиан отображения (47.22) не меняет знака, то это возможно лишь в том случае, когда число ε имеет тот же знак, что и якобиан $\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}$, а в этом случае $\varepsilon\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \left|\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}\right|$. Тем самым знак ε не зависит от выбора контура γ, а определяется знаком якобиан, который один и тот же во всех точках области G.

Таким образом, доказана следующая теорема.

Теорема 2. Если выполнены сделанные выше предположения, то справедлива формула

$$\operatorname{mes}\Gamma^* = \iint\limits_{\Gamma} \left| \frac{\partial (x, y)}{\partial (u, v)} \right| du\, dv. \tag{47.26}$$

Кроме того, если якобиан $\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} > 0$ *на* Γ, *то* $\varepsilon = +1$, *иначе говоря, если якобиан отображения* F *положителен, то положительному обходу всякого контура* $\gamma \subset G$, *являющегося границей ограниченной области* $\Gamma \subset G$, *при отображении* F *соответствует положительный обход контура* $\gamma^* = F(\gamma)$, *являющегося границей ограниченной области* $\Gamma^* = F(\Gamma)$. *Если же якобиан* $\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} < 0$ *на* Γ, *то* $\varepsilon = -1$, *т. е. положительному обходу всякого контура* γ, *указанного типа, соответствует при отображении* F *отрицательный обход контура* $\gamma^* = F(\gamma)$.

Таким образом, *геометрический смысл знака якобиана состоит в том, что при положительном якобиане ориентация контуров сохраняется, а при отрицательном — меняется.*

С помощью формулы (47.19) формула (47.26) легко обобщается на случай, когда граница области Γ состоит из конечного числа кусочно-гладких замкнутых контуров.

Отметим еще, что с помощью формулы (47.26) можно без труда получить более простое доказательство теоремы 1 из п. 46.1 о геометрическом смысле модуля якобиана. Действительно, пусть $M_0 \in \Gamma$, $d(\Gamma)$— диаметр области Γ, и область Γ каким-либо образом стягивается к точке M_0 и, следовательно, $d(\Gamma) \to 0$.

По теореме о среднем (см. п. 44.5)

$$\operatorname{mes}\Gamma^* = \iint\limits_{\Gamma} \left| \frac{\partial (x, y)}{\partial (u, v)} \right| du\, dv = \left| \frac{\partial (x, y)}{\partial (u, v)} \right|_M \operatorname{mes}\Gamma, \quad M \in \Gamma,$$

поэтому

$$\frac{\operatorname{mes}\Gamma^*}{\operatorname{mes}\Gamma} = \left| \frac{\partial (x, y)}{\partial (u, v)} \right|_M.$$

В силу непрерывности якобиана

$$\lim_{d(\Gamma)\to 0} \left| \frac{\partial (x, y)}{\partial (u, v)} \right|_M = \left| \frac{\partial (x, y)}{\partial (u, v)} \right|_{M_0},$$

поэтому

$$\lim_{d(\Gamma)\to 0} \frac{\operatorname{mes}\Gamma^*}{\operatorname{mes}\Gamma} = \left| \frac{\partial (x, y)}{\partial (u, v)} \right|_{M_0}, \tag{47.27}$$

т. е. мы доказали формулу (46.6) и в некотором смысле даже в более общем виде; так, здесь Γ — не обязательно квадрат (правда, на

отображение F мы наложили несколько более сильные условия, потребовав непрерывности смешанных производных $\frac{\partial^2 y}{\partial u\,\partial v}$ и $\frac{\partial^2 y}{\partial v\,\partial u}$ и возможности применения формулы Грина для области Γ^*). Нетрудно убедиться и в том, что стремление к пределу в формуле (47.27) происходит равномерно в смысле, указанном в теореме 1 п. 46.1.

Несмотря на простоту вывода формулы (47.27), следует отметить, что доказательство теоремы 1, приведенное в п. 46.1, идейно предпочтительнее, так как оно лучше раскрывает сущность вопроса, связанную с тем, что дифференцируемое отображение в малом достаточно хорошо аппроксимируется линейным отображением.

47.8. Криволинейные интегралы, не зависящие от пути интегрирования

Все кривые (контуры), рассматриваемые в этом пункте, будут всегда предполагаться кусочно-гладкими; для краткости это не будет каждый раз специально оговариваться.

Рассмотрим вопрос о том, когда криволинейный интеграл $\int\limits_{\widehat{AB}} P dx + Q dy$ зависит только от точек A и B и не зависит от выбора кривой $\widehat{AB}$, их соединяющей.

Теорема 3. *Пусть функции $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ непрерывны в плоской области G, тогда эквивалентны следующие три условия.*

1. *Для любого замкнутого контура γ, лежащего в G,*

$$\int\limits_{\gamma} P\,dx + Q\,dy = 0.$$

2. *Для любых двух точек $A \in G$ и $B \in G$ значение интеграла*

$$\int\limits_{\widehat{AB}} P\,dx + Q\,dy$$

не зависит от кривой $\widehat{AB} \subset G$, соединяющей точки A и B.

3. *Выражение $P dx + Q dy$ является в G полным дифференциалом, т. е. существует функция $u(M) = u(x, y)$, $M = (x, y)$, определенная в G и такая, что*

$$du = P\,dx + Q\,dy. \tag{47.28}$$

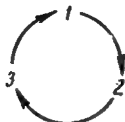
В этом случае если $A \in G$ и $B \in G$, то

$$\int\limits_{\widehat{AB}} P\,dx + Q\,dy = u(B) - u(A) \tag{47.29}$$

для любой кривой $\widehat{AB}$, соединяющей в G эти точки.

Таким образом, выполнение каждого из условий 1, 2 и 3 необходимо и достаточно для выполнения каждого из двух остальных.

Доказательство. Покажем, что из первого условия следует второе, из второго — третье, а из третьего — первое, т. е. проведем доказательство по схеме



Этим будет, очевидно, доказано, что из любого условия 1, 2 и 3 следует любое другое из них.

Первый шаг: $1 \to 2$. Пусть $A \in G$, $B \in G$ и даны две кривые $(\widehat{AB})_1$ и $(\widehat{AB})_2$, соединяющие в G точки A и B (рис. 152). Сумма $(\widehat{AB})_1 \cup (\widehat{BA})_2$ кривых $(\widehat{AB})_1$ и $(\widehat{BA})_2$ образует замкнутый контур, и потому в силу выполнения свойства 1

$$\int\limits_{(\widehat{AB})_1 \cup (\widehat{BA})_2} P\,dx + Q\,dy = 0. \qquad (47.30)$$

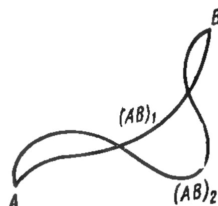


Рис. 152

Но

$$\int\limits_{(\widehat{AB})_1 \cup (\widehat{BA})_2} P\,dx + Q\,dy = \int\limits_{(\widehat{AB})_1} P\,dx + Q\,dy + \int\limits_{(\widehat{BA})_2} P\,dx + Q\,dy =$$

$$= \int\limits_{(\widehat{AB})_1} P\,dx + Q\,dy - \int\limits_{(\widehat{AB})_2} P\,dx + Q\,dy. \qquad (47.31)$$

Из (47.30) и (47.31) следует, что

$$\int\limits_{(\widehat{AB})_1} P\,dx + Q\,dy = \int\limits_{(\widehat{AB})_2} P\,dx + Q\,dy,$$

т. е. свойство 2 выполняется.

Второй шаг: $2 \to 3$. Пусть $M_0 \in G$, $M = (x, y) \in G$ и $\widehat{M_0M}$ — некоторая кривая, соединяющая в G точки M_0 и M. Положим

$$u(M) = \int\limits_{\widehat{M_0M}} P\,dx + Q\,dy.$$

В силу условия 2 при фиксированной точке M_0 функция $u(x, y)$ является однозначной функцией, так как значение $u(M) = u(x, y)$ не

зависит от выбора кривой, соединяющей в G точки M_0 и M. Покажем, что

$$\frac{\partial u(x, y)}{\partial x} = P(x, y) \text{ и } \frac{\partial u(x, y)}{\partial y} = Q(x, y).$$

Это, очевидно, равносильно равенству (47.28).

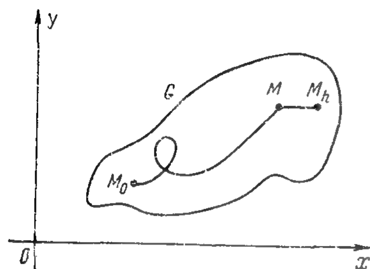


Рис. 153

Зафиксируем точку $M = (x, y)$. Выберем точку $M_h = (x+h, y) \in G$, $h \neq 0$, так, чтобы отрезок MM_h, соединяющий точки M и M_h (который, очевидно, параллелен оси Ox и имеет длину $|h|$), содержался в G (рис. 153). Для всех достаточно малых чисел h такой выбор всегда можно сделать (почему?). Тогда имеем

$$u(x+h, y) - u(x, y) = \\ = \int\limits_{\widehat{M_0 M_h}} P\,dx + Q\,dy - \int\limits_{\widehat{M_0 M}} P\,dx + Q\,dy = \int\limits_{MM_h} P\,dx + Q\,dy.$$

Вдоль отрезка MM_h координата y постоянна, поэтому $\int\limits_{MMh} Q\,dy = 0$ и, следовательно,

$$u(x+h, y) - u(x, y) = \int\limits_{MM_h} P\,dx = \int\limits_x^{x+h} P(t, y)\,dt.$$

Применяя теорему о среднем, получим

$$u(x+h, y) - u(x, y) = P(x+\theta h, y)\,h, \quad 0 < \theta < 1,$$

откуда

$$\frac{u(x+h, y) - u(x, y)}{h} = P(x+\theta h, y), \quad 0 < \theta < 1. \tag{47.32}$$

Правая часть этого равенства в силу непрерывности функции $P(x, y)$ при $h \to 0$ стремится к пределу, следовательно, и левая часть имеет предел при $h \to 0$. Переходя к пределу в (47.32), мы и получим

$$\frac{\partial u(x, y)}{\partial x} = P(x, y).$$

Совершенно аналогично доказывается и равенство

$$\frac{\partial u(x, y)}{\partial y} = Q(x, y).$$

Итак, существование функции $u(x\ y)$, для которой имеет место (47.28), доказано.

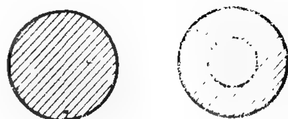


Рис. 154

Пусть теперь $A \in G$, $B \in G$, $\overset{\frown}{AB}$ — некоторая кривая, соединяющая в G точки A и B и пусть $x = x(t)$, $y = y(t)$, $a \leqslant t \leqslant b$ — ее представление и, следовательно, $A = (x(a),\ y(a))$, $B = (x(b),\ y(b))$. Тогда имеем

$$\int_{\overset{\frown}{AB}} P\,dx + Q\,dy = \int_a^b \{P[x(t), y(t)]\,x'(t) + Q[x(t), y(t)]\,y'(t)\}\,dt =$$

$$= \int_a^b u_t'\,dt = u[x(b), y(b)] - u[x(a), y(a)] = u(B) - u(A),$$

т. е. формула (47.29) также доказана.

Третий шаг: $3 \to 1$. Это утверждение сразу следует из формулы (47.29). Действительно, для любого замкнутого контура γ его начальная точка совпадает с конечной, поэтому в силу (47.29)

$$\int_\gamma P\,dx + Q\,dy = u(A) - u(A) = 0.$$

Теорема доказана.

Заметим, что, хотя эта теорема и дает необходимые и достаточные условия независимости криволинейного интеграла $\int Pdx + Qdy$ от пути, однако эти условия трудно фактически проверяемы. Если сузить класс рассматриваемых областей, то можно получить существенно более простой и эффективный критерий. Введем следующее определение.

Определение 8. *Плоская область G называется односвязной, если, каков бы ни был простой контур $\gamma \subset G$, ограниченная область Γ, границей которой является контур γ, содержится в G.*

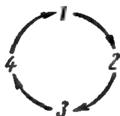
Образно говоря, односвязность области означает, что область не имеет «дыр». Круг является примером односвязной области, круговое кольцо — неодносвязной (рис. 154).

Теорема 4. *Пусть функции $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ непрерывны вместе со своими частными производными $\frac{\partial P}{\partial y}$ и $\frac{\partial Q}{\partial x}$ в односвяз-*

ной области G. Тогда каждое из трех условий 1, 2 и 3 теоремы 3 эквивалентно следующему условию:

$$4.\ \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} \text{ в } G.$$

Доказательство. Применим схему



Утверждения $1 \to 2 \to 3$ уже доказаны. Докажем $3 \to 4$ и $4 \to 1$.

Первый шаг: $3 \to 4$. Если в G существует функция $u = u(x, y)$, такая, что $du = P\,dx + Q\,dy$, т. е. такая, что $\frac{\partial u}{\partial x} = P$, $\frac{\partial u}{\partial y} = Q$, то (см. п. 21.1)

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right) = \frac{\partial Q}{\partial x},$$

следовательно, условие 4 выполнено. Заметим, что, как это видно из приведенного доказательства, утверждение $3 \to 4$ справедливо для любого открытого множества (в частности, без предположения односвязности).

Второй шаг: $4 \to 1$. Заметим предварительно, что если выполнено условие 4, т. е.

$$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 0,$$

если γ — простой замкнутый контур, лежащий в G, и Γ — ограниченная область, границей которой является γ, то, применяя формулу Грина (здесь используется односвязность области G), получим

$$\int_{\gamma^+} P\,dx + Q\,dy = \iint_{\Gamma} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\,dy = 0.$$

Если кривая γ, лежащая в G, имеет конечное число точек самопересечения, то последовательно для каждой ее «петли» γ_k, $k = 1, 2, \ldots, k_0$, являющейся уже простым замкнутым контуром, в силу доказанного имеем

$$\int_{\gamma_k} P\,dx + Q\,dy = 0,$$

откуда следует, что и для всей кривой γ

$$\int_{\gamma} P\,dx + Q\,dy = 0. \qquad (47.33)$$

Переходя к доказательству утверждения $4 \to 1$ в общем случае, заметим прежде всего, что рассмотренным приемом равенство (47.33) доказывается и для случая, когда γ является замкнутой конечнозвенной ломаной. С геометрической точки зрения отличие состоит лишь в том, что самопересечение конечнозвенной ломаной может состоять не только из конечного числа точек, но и конечного числа отрезков*).

Любая же замкнутая кусочно-гладкая кривая γ, лежащая в G, может быть сколь угодно точно аппроксимирована замкнутыми конечнозвенными ломаными, поэтому предельным переходом равенство (47.33) может быть получено и для любой замкнутой кривой из G. Для того чтобы это показать, докажем следующую лемму.

Лемма 1. *Пусть функции $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ непрерывны в области G, γ — гладкая кривая, лежащая в G, $x = x(t)$, $y = y(t)$, $a \leqslant t \leqslant b$, — ее представление, $\tau = \{t_i\}_{i=0}^{i=i_0}$ — разбиение отрезка $[a, b]$, λ_τ — ломаная с вершинами в точках $(x(t_i), \; y(t_i))$, $i = 0, 1, \dots i_0$**).*

Тогда

$$\lim_{\delta_\tau \to 0} \int_{\lambda_\tau} P\,dx + Q\,dy = \int_{\gamma} P\,dx + Q\,dy. \qquad (47.34)$$

Доказательство. Носитель кривой γ является, очевидно, ограниченным замкнутым множеством. Обозначим его для простоты также через γ. Поскольку множество γ не пересекается с замкнутым множеством $E_{xy}^2 \setminus G$, то расстояние между ними больше нуля (см. лемму 4 п. 18.2). Пусть η — какое-либо число, такое, что

$$\rho(\gamma, E_{xy}^2 \setminus G) > \eta > 0.$$

---

*) Для конечной области, ограниченной конечнозвенной ломаной, возможность применения к ней формулы Грина следует из того, что такую область можно разбить на треугольники, которые, очевидно, являются элементарными относительно обеих координатных осей областями. Следовательно, в этом случае выполняются предпосылки теоремы 1 п. 47.3.

**) Такая ломаная λ называется *вписанной в кривую γ ломаной, соответствующей разбиению τ отрезка* $[a, b]$. Если же для некоторой последовательности ломаных $\{\lambda_{\tau_n}\}$ выполняется условие $\delta_{\tau_n} \to 0$ при $n \to \infty$, то будем говорить, что звенья этих ломаных стремятся к нулю при $n \to \infty$.

Обозначим через γ_η совокупность всех точек плоскости, находящихся от γ на расстоянии, не большем чем η. Множество γ_η ограничено, замкнуто (см. там же лемму 6) и $\gamma_\eta \subset G$.

В силу равномерной непрерывности функций $x(t)$ и $y(t)$ на отрезке $[a, b]$ существует такое число $\delta_0 > 0$, что для любых двух точек $t' \in [a, b]$ и $t'' \in [a, b]$, удовлетворяющих условию $|t' - t''| < \delta_0$, выполняется неравенство

$$\rho(M', M'') = \sqrt{[x(t'') - x(t')]^2 + [y(t'') - y(t')]^2} < \eta,$$

где $M' = (x(t'), y(t'))$, $M'' = (x(t''), y(t''))$. Все точки отрезка с концами в точках M' и M'', очевидно, также находятся от точки M' на расстоянии, не большем чем η, и потому лежат в γ_η и, следовательно, в G. Поэтому, если мелкость δ_τ разбиения τ отрезка $[a, b]$ такова, что $\delta_\tau < \delta_0$, то все точки ломаной λ_τ лежат в G, и для таких разбиений τ имеет смысл рассматривать интеграл $\int\limits_{\lambda_\tau} P dx + Q dy$.

Рассмотрим интегралы $\int\limits_\gamma P\,dx$ и $\int\limits_{\lambda_\tau} P\,dx$. Положим

$x_i = x(t_i)$, $y_i = y(t_i)$, $P_i = P(x_i, y_i)$, $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$, $i = 1, 2, \ldots, i_0$,

$\sigma_\tau = \sum\limits_{i=1}^{i_0} P_i \Delta x_i$.

Как известно (см. п. 47.2, свойство 4),

$$\lim_{\delta_\tau \to 0} \sigma_\tau = \int\limits_\gamma P\,dx. \tag{47.35}$$

Пусть, далее, $M_i = (x_i, y_i)$ — вершины ломаной λ_τ, тогда

$$\int\limits_{\lambda_\tau} P\,dx = \sum_{i=1}^{i_0} \int\limits_{M_{i-1} M_i} P\,dx. \tag{47.36}$$

С другой стороны, заметим, что (употребляя обозначение п. 47.2)

$$\int\limits_{M_{i-1} M_i} dx = \int\limits_{M_{i-1} M_i} \cos\alpha\,ds = |M_{i-1} M_i| \cos\alpha = \Delta x_i,$$

поэтому

$$\sigma_\tau = \sum_i P_i \Delta x_i = \sum_i \int\limits_{M_{i-1} M_i} P_i\,dx. \tag{47.37}$$

Обозначая через L_τ длину ломаной λ_τ, через S — длину кривой γ, а через $\omega(\delta; P)$ — модуль непрерывности функции $P(x, y)$ на ограниченном замкнутом множестве γ_η, из (47.36) и (47.37) получим

$$\left|\int\limits_{\lambda_\tau} P\,dx - \sigma_\tau\right| \leqslant \sum_i \left|\int\limits_{M_{i-1} M_i} |P - P_i|\,dx\right| \leqslant$$

$$\leqslant \omega(\delta_\tau; P)\sum_i |\Delta x_i| \leqslant \omega(\delta_\tau; P) L_\tau \leqslant \omega(\delta_\tau; P) S.$$

Отсюда

$$\lim_{\delta_\tau \to 0} \left(\int_{\lambda_\tau} P\,dx - \sigma_\tau \right) = 0,$$

и, значит, в силу (47.35)

$$\lim_{\delta_\tau \to 0} \int_{\lambda_\tau} P\,dx = \int_\gamma P\,dx. \tag{47.38}$$

Аналогично доказывается и равенство

$$\lim_{\delta_\tau \to 0} \int_{\lambda_\tau} Q\,dy = \int_\gamma Q\,dy. \tag{47.39}$$

Из (47.38) и (47.39) непосредственно и следует утверждение леммы, т. е. формула (47.34).

Лемма доказана.

З а м е ч а н и е. Утверждение, аналогичное лемме, справедливо и для криволинейных интегралов в пространстве, причем доказательство пространственного случая проводится по той же схеме, что и плоского.

Вернемся теперь к доказательству теоремы. Пусть γ — кусочно-гладкая замкнутая кривая в области G, заданная некоторым представлением $r(t)$, $a \leqslant t \leqslant b$, и являющаяся объединением гладких кривых $\gamma_1, \ldots, \gamma_k$. Впишем в каждую кривую γ_j, $j = 1, 2, \ldots, k$, ломаную λ_j. Объединение всех ломаных λ_j, $j = 1, 2, \ldots, k$ образует замкнутую ломаную λ, соответствующую некоторому разбиению τ отрезка $[a, b]$. В силу доказанного

$$\int_\lambda P\,dx + Q\,dy = 0.$$

Но, согласно лемме,

$$\lim_{\delta_\tau \to 0} \int_{\lambda_j} P\,dx + Q\,dy = \int_{\gamma_j} P\,dx + Q\,dy,\ j = 1, \ldots, k,$$

и, следовательно,

$$\lim_{\delta_\tau \to 0} \int_\lambda P\,dx + Q\,dy = \int_\gamma P\,dx + Q\,dy,$$

поэтому

$$\int_\gamma P\,dx + Q\,dy = 0.$$

Теорема доказана.

В заключение этого пункта отметим, что в теореме 4 требование односвязности рассматриваемой области является существенным, его нельзя отбросить. Подтвердим это примером.

Пример. Пусть

$$P(x, y) = -\frac{y}{x^2+y^2}, \quad Q(x, y) = \frac{x}{x^2+y^2}.$$

Легко проверить, что

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y} \tag{47.40}$$

для всех точек плоскости, исключая начало координат (0, 0). Это следует, например, из того, что

$$d\left(\operatorname{arctg}\frac{y}{x}\right) = \frac{-y\,dx + x\,dy}{x^2+y^2}, \quad x^2+y^2>0. \tag{47.41}$$

Таким образом, в этом случае за область G можно взять всю плоскость с «выколотым» началом координат: $G = E^2 \setminus \{(0, 0)\}$. Область G, очевидно, не односвязна. В качестве замкнутого контура возьмем единичную окружность

$$\gamma_0 = \{x=\cos t, \quad y=\sin t, \quad 0 \leqslant t \leqslant 2\pi\},$$

тогда

$$\int\limits_{\gamma_0} P\,dx + Q\,dy = \int\limits_{\gamma_0} \frac{-y\,dx + x\,dy}{x^2+y^2} = \int\limits_0^{2\pi} dt = 2\pi.$$

Таким образом, в этом случае условия (47.40) выполнены, но мы нашли замкнутый контур γ_0, по которому интеграл не равен нулю. Нетрудно убедиться, что вообще по любой окружности γ_r радиуса r с центром в начале координат

$$\int\limits_{\gamma_r} P\,dx + Q\,dy = 2\pi. \tag{47.42}$$

Далее, каков бы ни был простой кусочно-гладкий контур γ, являющийся границей ограниченной области Γ, содержащей начало координат (в этом случае говорят, что контур γ содержит внутри себя начало координат), для него также

$$\int\limits_{\gamma} P\,dx + Q\,dy = 2\pi. \tag{47.43}$$

Для доказательства этого возьмем окружность γ_r такого радиуса r, чтобы $\gamma_r \subset \Gamma$, тогда контуры γ и γ_r не пересекаются. Соединим

контуры γ и γ_r отрезками λ_1 и λ_2, как показано на рис. 155, — получим два замкнутых контура γ_1 и γ_2, не содержащих внутри себя начала координат и состоящих из дуг γ_r' и γ_r'' окружности γ_r, частей γ' и γ'' контура γ и отрезков λ_1 и λ_2.

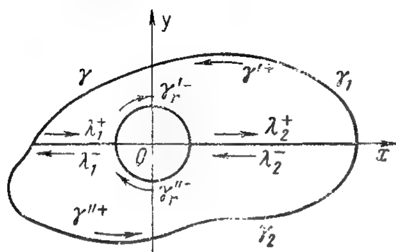


Рис. 155

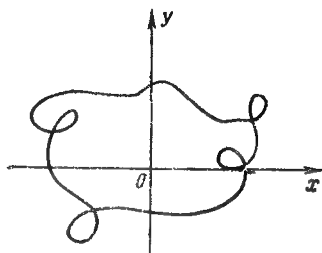


Рис. 156

В силу условия (47.40) для этих контуров справедливы равенства

$$\int_{\gamma_1} P\,dx + Q\,dy = 0, \quad \int_{\gamma_2} P\,dx + Q\,dy = 0.$$

Складывая эти равенства и опуская для простоты подынтегральные выражения, получим (см. рис. 155)

$$0 = \int_{\gamma_1} + \int_{\gamma_2} = \int_{\gamma'^+} + \int_{\lambda_1^+} + \int_{\gamma_r'^-} + \int_{\lambda_2^+} + \int_{\gamma''^+} + \int_{\lambda_2^-} + \int_{\gamma_r''^-} + \int_{\lambda_1^-} =$$

$$= \int_{\gamma'^+} + \int_{\gamma''^+} - \int_{\gamma_r'^+} - \int_{\gamma_r''^+} = \int_{\gamma^+} - \int_{\gamma_r^+}.$$

Отсюда в силу (47.42) и следует (47.43). Более того, это равенство выполняется и в том случае, если контур γ, обходя «один раз» вокруг начала координат, образует конечное число «петель», не охватывающих начало координат (рис. 156), ибо интеграл по этим петлям равен нулю.

Если M_0 — фиксированная точка рассматриваемой области G, $M_0 \in G$, $M \in G$, $\widehat{M_0M}$ — какая-либо кривая, соединяющая в G точки M_0 и M, то в данном случае функция

$$u(M) = \int_{\widehat{M_0M}} P\,dx + Q\,dy$$

уже будет многозначной функцией, значения которой определяются выбором различных путей, соединяющих точки M_0 и M. Если γ_0 — какая-либо фиксированная кривая, соединяющая M_0 и M, то все значения функции u в точке M задаются формулой

$$u(M)=\int\limits_{\gamma_0} P\,dx+Q\,dy+2\pi n, \quad n=0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

— каждый обход вокруг начала координат изменяет значение функции $u(M)$ на величину $\pm 2\pi$ в зависимости от направления обхода.

В данном случае в этом легко убедиться и непосредственно: из формулы (47.41) следует, что

$$\int\limits_{\gamma_0} P\,dx+Q\,dy=\int\limits_{\gamma_0}\frac{-y\,dx+x\,dy}{x^2+y^2}=\left(\operatorname{Arctg}\frac{y}{x}\right)_0,$$

где $\left(\operatorname{Arctg}\frac{y}{x}\right)_0$ — некоторое фиксированное значение $\operatorname{Arctg}\frac{y}{x}$; поэтому

$$u(M)=\operatorname{Arctg}\frac{y}{x}.$$

Вдумчивый читатель заметил, что многие рассуждения, проведенные в этом примере, не зависят от конкретного вида функций P и Q и являются справедливыми всегда, когда мы имеем дело с одной изолированной «особой точкой», т. е. точкой, в которой нарушается условие (47.40).

Упражнение 2. Пусть $\Delta u=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$. Доказать формулу

$$\iint\limits_G v\Delta u\,dx\,dy=-\iint\limits_G\left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y}\right)dx\,dy+\int\limits_{\gamma^+} v\frac{\partial u}{\partial \nu}\,ds,$$

где G — плоская область, для которой справедлива формула Грина, γ — ограничивающий ее контур, ν — единичная внешняя нормаль к контуру γ.

§ 48. НЕСОБСТВЕННЫЕ КРАТНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

48.1. Основные определения

Как и ранее, для однократных интегралов введем понятие несобственного кратного интеграла, т. е. кратного интеграла от функций, которые либо неограничены, либо определены на неограниченной области. Определение кратного несобственного интеграла сформулируем в таком виде, что оно будет охватывать оба указанных случая (ср. с п. 34.1).

Определение 1. *Пусть G — открытое множество (ограниченное или неограниченное) в n-мерном пространстве E^n. Последовательность открытых множеств G_k, $k=1, 2, \ldots$, будем называть*

последовательностью, монотонно исчерпывающей открытое множество G, если

1) $\overline{G}_k \subset G_{k+1}, \quad k=1, 2, \ldots;$

2) $\bigcup\limits_{k=1}^{\infty} G_k = G.$

Определение 2. *Пусть на открытом множестве G задана функция f (ограниченная или неограниченная) и пусть эта функция f интегрируема по Риману на любом кубируемом открытом множестве D, таком, что $\overline{D} \subset G$. Тогда функция f называется интегрируемой в несобственном смысле на открытом множестве G, если для любой последовательности открытых кубируемых множеств G_k, $k=1, 2\ldots$, монотонно исчерпывающей множество G, существует предел $\lim\limits_{k\to\infty}\int f dG_k$, не зависящий от выбора указанной последовательности G_k, $k = 1, 2, \ldots$.*

Этот предел называется несобственным интегралом от функции f по открытому множеству G и обозначается $\int f dG$, или более подробно

$$\iint\limits_G \ldots \int f(x_1, x_2, \ldots, x_n)\, dx_1\, dx_2 \ldots dx_n.$$

Таким образом,

$$\int f\, dG = \lim_{k\to\infty}\int f\, dG_k. \tag{48.1}$$

Если интеграл $\int f dG$ существует, то говорят также, что он сходится, а в противном случае — расходится.

Следует заметить, что в случае $n = 1$ данное определение несобственного интеграла не эквивалентно определению несобственного интеграла от функции одного переменного, данного в § 33 и 34. Это связано с тем, что в указанных параграфах мы в качестве множеств G_k брали лишь интервалы, т. е. одномерные открытые кубируемые множества весьма специального вида. Поэтому введенное в настоящем параграфе понятие несобственного интеграла (48.1) будем применять только в случае $n \geqslant 2$, сохранив для случая $n = 1$ прежнее понятие несобственного интеграла.

Если открытое множество G кубируемо и функция f интегрируема на G, то несобственный интеграл от функции f совпадает с обычным интегралом Римана,— это следует из полной аддитивности интеграла Римана (см. п. 44.5).

Определение (48.1) позволяет перенести на несобственные интегралы ряд свойств собственных интегралов: аддитивность интеграла по множествам, линейность интеграла, интегрирование неравенств, сведение кратного интеграла к повторному, формулу замены переменного и др.

Например, если $x = F(u)$ — непрерывно дифференцируемое взаимно однозначное отображение открытого множества $D \subset E_u^n$ на открытое множество $G \subset E_x^n$ и якобиан $J(u)$ этого отображения нигде не обращается в ноль на D, то

$$\int f(x)\, dG = \int f[F(u)]\, |J(u)|\, dD.$$

Доказать это можно точно так же, как доказана теорема 2′ в п. 46.2; следует только вместо полной аддитивности интеграла использовать определение (48.1).

Используя аддитивность несобственного кратного интеграла, определение (48.1) можно переписать в другом эквивалентном виде. Замечая, что для кубируемого множества $\Gamma \subset G$, справедливо равенство

$$\int f\, dG - \int f\, d\Gamma = \int f\, d(G \setminus \overline{\Gamma}), \tag{48.2}$$

можно сказать, что интеграл $\int f dG$ сходится тогда и только тогда, когда для любой последовательности кубируемых множеств G_k, $k = 1, 2, \ldots$, монотонно исчерпывающей множество G,

$$\lim_{k \to \infty} \int f\, d(G \setminus \overline{G}_k) = 0. \tag{48.3}$$

Упражнение 1. Доказать формулу (48.2); в частности, показать, что интегралы $\int f dG$ и $\int f d(G \setminus \overline{\Gamma})$ одновременно сходятся или расходятся.

48.2. Несобственные интегралы от неотрицательных функций

Теорема 1. *Пусть функция f неотрицательна на открытом множестве $G \subset E^n$. Тогда либо функция f интегрируема (в несобственном смысле), либо*

$$\lim_{k \to \infty} \int f\, dG_k = +\infty$$

для любой монотонно исчерпывающей множество G последовательности кубируемых множеств G_k, $k = 1, 2, \ldots$.

В последнем случае пишут

$$\int f\, dG = +\infty.$$

Доказательство. Очевидно, теорема будет доказана, если показать, что для любой монотонно исчерпывающей область G

последовательности кубируемых множеств G_k, $k = 1, 2, \ldots$ существует конечный или бесконечный предел

$$\lim_{k \to \infty} \int f \, dG_k$$

и этот предел не зависит от выбора указанной последовательности.

Пусть G_k, $k = 1, 2, \ldots$, — последовательность кубируемых множеств, монотонно исчерпывающая открытое множество G. Тогда, согласно определению такой последовательности, $G_k \subset G_{k+1}$, $k = 1, 2, \ldots$, а так как $f \geqslant 0$, то $\int f \, dG_k \leqslant \int f \, dG_{k+1}$, $k = 1, 2, \ldots$ и, следовательно, всегда существует конечный или бесконечный предел

$$\lim_{k \to \infty} \int f \, dG_k = I_1.$$

Пусть, теперь D_k, $k = 1, 2, \ldots$ — какая-либо другая последовательность кубируемых множеств, монотонно исчерпывающая открытое множество G. В силу доказанного выше существует конечный или бесконечный предел

$$\lim_{k \to \infty} \int f \, dD_k = I_2.$$

Покажем, что

$$I_1 = I_2. \tag{48.4}$$

Для любого фиксированного элемента G_k первой последовательности существует номер $k_0 = k_0(k)$, такой, что

$$\overline{G}_k \subset D_{k_0}. \tag{48.5}$$

Это следует из того, что открытое множество G_k, будучи кубируемым, является и ограниченным, поэтому $\overline{G}_k$ есть ограниченное замкнутое множество, и существование номера k_0, для которого имеет место включение (48.5), следует из леммы 3 п. 31.2. В силу же условия $f \geqslant 0$ из (48.5) вытекает, что

$$\int f \, dG_k \leqslant \int f \, dD_{k_0},$$

но, очевидно,

$$\int f \, dD_{k_0} \leqslant I_2,$$

поэтому при любом $k = 1, 2, \ldots$

$$\int f \, dG_k \leqslant I_2.$$

Переходя в этом неравенстве к пределу при $k \to \infty$, получим

$$I_1 \leqslant I_2.$$

Подобным же образом доказывается и неравенство

$$I_1 \geqslant I_2.$$

Тем самым равенство (48.5), а вместе с ним и теорема доказаны.

Пример. Рассмотрим интеграл

$$I = \iint\limits_{E^2} e^{-x^2-y^2}\,dx\,dy.$$

Положим $G_k = \{(x, y): x^2+y^2 \leqslant k^2\}$, $k = 1, 2, \ldots$. Эта последовательность является последовательностью квадрируемых множеств (в данном случае просто кругов), монотонно исчерпывающей всю плоскость E^2.

Пусть

$$I_k = \iint\limits_{G_k} e^{-x^2-y^2}\,dx\,dy.$$

Перейдем к полярным координатам:

$$I_k = \iint\limits_{G_k} e^{-r^2} r d\,r d\varphi = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^k e^{-r^2}\,r\,dr = 2\pi\,\frac{e^{-r^2}}{2}\Bigg|_0^k = \pi(1-e^{-k^2}).$$

Отсюда, согласно определению (48.1),

$$I = \lim_{k\to\infty} I_k = \pi. \tag{48.6}$$

Найденное значение интеграла I легко позволяет найти величину интеграла

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,dx,$$

называемого интегралом Пуассона*) и часто встречающегося в приложениях. Действительно,

$$I = \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,dx \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2}\,dy = \left(\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,dx\right)^2.$$

Поэтому из (48.6) сразу получаем

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,dx = \sqrt{\pi}.$$

---

*) С. Пуассон (1781—1840) — французский математик и физик.

Теорема 2 (признак сравнения). *Пусть в открытом множестве G выполняются неравенства*

$$0 \leqslant f(x) \leqslant g(x), \quad x \in G,$$

тогда из сходимости интеграла $\int g(x)\,dG$ *следует сходимость интеграла* $\int f(x)\,dG$, *а из расходимости интеграла* $\int f(x)\,dG$ *следует расходимость интеграла* $\int g(x)\,dG$.

Эта теорема доказывается аналогично подобной теореме в одномерном случае (см. п. 33.3 и п. 34.3).

В качестве примеров и эталонов для сравнения с другими интегралами рассмотрим интегралы

$$\int\limits_{x_1^2+\ldots+x_n^2 \geqslant 1} \ldots \int \frac{dx_1 \ldots dx_n}{\left(\sqrt{x_1^2+\ldots+x_n^2}\right)^{\alpha}} \tag{48.7}$$

и

$$\int\limits_{x_1^2+\ldots+x_n^2 \leqslant 1} \ldots \int \frac{dx_1 \ldots dx_n}{\left(\sqrt{x_1^2+\ldots+x_n^2}\right)^{\alpha}}. \tag{48.8}$$

Первый интеграл берется по внешности единичного шара; второй — по его внутренности.

Для исследования этих интегралов удобно ввести *сферические координаты* ρ, $\varphi_1, \ldots, \varphi_{n-1}$ в n-мерном пространстве. Они вводятся по формулам

$$\left.\begin{aligned}
x_1 &= \rho \cos\varphi_{n-1} \cos\varphi_{n-2} \ldots \cos\varphi_2 \cos\varphi_1, \\
x_2 &= \rho \cos\varphi_{n-1} \cos\varphi_{n-2} \ldots \cos\varphi_2 \sin\varphi_1, \\
x_3 &= \rho \cos\varphi_{n-1} \cos\varphi_{n-2} \ldots \cos\varphi_3 \sin\varphi_2, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
x_i &= \rho \cos\varphi_{n-1} \ldots \cos\varphi_i \sin\varphi_{i-1}, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
x_n &= \rho \sin\varphi_{n-1},
\end{aligned}\right\} \tag{48.9}$$

где

$$0 \leqslant \rho < +\infty, \quad 0 \leqslant \varphi_1 \leqslant 2\pi, \quad -\frac{\pi}{2} \leqslant \varphi_i \leqslant \frac{\pi}{2}, \quad i = 2, 3, \ldots, n-1.$$

С помощью этих формул декартовым координатам $x_1, \ldots, x_n$ точки пространства сопоставляются сферические координаты $\rho, \varphi_1, \ldots, \varphi_{n-1}$, и обратно. При этом следует иметь в виду, что, подобно полярным координатам на плоскости, здесь не существует

полного взаимно однозначного соответствия между множествами n чисел $(x_1, \ldots, x_n)$ и $(\rho, \varphi_1, \ldots, \varphi_{n-1})$.
Отметим, что

$$\rho = \sqrt{x_1^2 + \ldots + x_n^2}.$$

Элементарными, но несколько громоздкими вычислениями, которые не будем здесь приводить, можно показать, что якобиан этого преобразования имеет вид

$$\frac{\partial (x_1, x_2, \ldots, x_n)}{\partial (\rho, \varphi_1, \ldots, \varphi_{n-1})} = \rho^{n-1} \cos\varphi_2 \cos^2\varphi_3 \ldots \cos^{n-2}\varphi_{n-1}.$$

Положим для краткости

$$\Phi(\varphi_2, \ldots, \varphi_{n-1}) = \cos\varphi_2 \cos^2\varphi_3 \ldots \cos^{n-2}\varphi_{n-1}.$$

Легко убедиться, что

$$c = \int_0^{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \ldots \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \Phi(\varphi_2 \ldots \varphi_{n-1})\, d\varphi_1 \ldots d\varphi_{n-1} > 0^{*)}.$$

Исследуем теперь сходимость интеграла (48.7). В качестве последовательности кубируемых множеств G_k, $k = 1, 2, \ldots$, монотонно исчерпывающей внешность единичного шара Q, возьмем последовательность множеств

$$G_k = \left\{x = (\rho, \varphi_1, \ldots, \varphi_{n-1}) : 1 + \frac{1}{k} < \rho < k\right\},\ k = 1, 2, \ldots .$$

Перейдем к сферическим координатам:

$$\int \underset{G_k}{\ldots} \int \frac{dx_1 \ldots dx_n}{\left(\sqrt{x_1^2 + \ldots + x_n^2}\right)^\alpha} =$$

$$= \int_{1+\frac{1}{k}}^{k} \int_0^{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \ldots \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \rho^{n-1-\alpha}\, \Phi(\varphi_2, \ldots, \varphi_{n-1})\, d\rho\, d\varphi_1 \ldots d\varphi_{n-1} =$$

---

*) Это следует из того факта, что если в кубируемой области G функция f непрерывна и неотрицательна и если существует точка $x^{(0)} \in G$ такая, что $f(x^{(0)}) > 0$, то $\int f\, dG > 0$. Действительно, выберем какое-либо $\eta > 0$ так, чтобы $f(x^{(0)}) > \eta > 0$. Тогда существует $\delta > 0$ такая, что для всех $x \in O = O(x^{(0)}, \delta)$ выполняется неравенство $f(x) > \eta$ и $\int f\, dG \geqslant \int f\, dO \geqslant \eta \operatorname{mes} O > 0$.

$$=c\int\limits_{1+\frac{1}{k}}^{k} \rho^{n-1-\alpha}\,d\rho.$$

Таким образом, вопрос о сходимости интеграла (48.7) свелся к сходимости интеграла $\int\limits_1^\infty \rho^{n-1-\alpha}d\rho$, который, как известно (см. п.34.3), сходится при $n-1-\alpha<-1$, т. е. при $\alpha>n$, и расходится при $\alpha\leqslant n$. Итак, доказана следующая лемма.

Лемма 1. *Интеграл (48.7) сходится, если α больше размерности пространства, и расходится в противном случае.*

Рассмотрим теперь интеграл (48.8). Полагая

$$G_k=\left\{x=(\rho,\varphi_1,\ldots,\varphi_{n-1}):\frac{1}{k}<\rho<1-\frac{1}{k}\right\},\ k=3,4,\ldots,$$

получим

$$\int\cdots\int\frac{dx_1,\ldots,dx_n}{(\sqrt{x_1^2+\ldots+x_n^2})^\alpha}=$$

$$=\int\limits_{\frac{1}{k}}^{1-\frac{1}{k}}\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cdots\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\rho^{n-1-\alpha}\Phi(\varphi_2,\ldots,\varphi_{n-1})d\rho d\varphi_1\ldots d\varphi_{n-1}=$$

$$=c\int\limits_{\frac{1}{k}}^{1-\frac{1}{k}}\rho^{n-1-\alpha}\,d\rho.$$

Таким образом, вопрос о сходимости интеграла (48.8) свелся к сходимости интеграла $\int\limits_0^1\rho^{n-1-\alpha}d\rho$. Этот интеграл, как известно, сходится, если $n-1-\alpha>-1$, т. е. если $\alpha<n$, и расходится в противном случае. Полученный результат сформулируем снова в виде леммы.

Лемма 2. *Интеграл (48.8) сходится, если α меньше размерности пространства, и расходится в противном случае.*

Подобно одномерному случаю (см. п. 33.3 и п. 34.3) с помощью интегралов (48.7) и (48.8) можно сформулировать критерии сходимости несобственных кратных интегралов, однако мы не будем на этом подробно останавливаться.

48.3. Несобственные интегралы от функций, меняющих знак

Определение 3. *Несобственный интеграл $\int f\,dG$ называется абсолютно сходящимся, если сходится интеграл $\int|f|\,dG$.*

Приведем одно необходимое и достаточное условие абсолютной сходимости интеграла. Для этого положим

$$f_+(x)=\begin{cases} f(x), & \text{если} \quad f(x)\geqslant 0,\\ 0, & \text{если} \quad f(x)<0,\end{cases}$$

и

$$f_-(x)=\begin{cases} -f(x), & \text{если} \quad f(x)\leqslant 0,\\ 0, & \text{если} \quad f(x)>0.\end{cases}$$

Легко видеть, что

$$f_+=\frac{|f|+f}{2}, \quad f_-=\frac{|f|-f}{2}, \tag{48.10}$$

$$0\leqslant f_+(x)\leqslant |f(x)|, \quad 0\leqslant f_-(x)\leqslant |f(x)|, \tag{48.11}$$

$$f(x)=f_+(x)-f_-(x), \quad |f(x)|=f_+(x)+f_-(x). \tag{48.12}$$

Из формул (48.10) следует, что, если функция f интегрируема по Риману на некоторой кубируемой области, то и функции f_+ и f_- также интегрируемы по Риману на этой области; из первой формулы (48.12) следует обратное утверждение. Поэтому из (48.10)—(48.12) следует, что *интеграл* $\int f\,dG$ *абсолютно сходится тогда и только тогда, когда сходятся интегралы* $\int f_+\,dG$ *и* $\int f_-\,dG$.

Как и в случае несобственных интегралов от функции одного переменного, из абсолютной сходимости кратного интеграла следует его сходимость (при этом конечно рассматриваются только такие функции, которые интегрируемы на каждом кубируемом множестве, содержащемся вместе со своим замыканием в открытом множестве, по которому производится интегрирование). Это сразу получается на основании формул (48.11), первой формулы (48.12) и из теоремы 2 настоящего параграфа (см. п. 48.2). Однако для кратных несобственных интегралов справедлива и обратная теорема.

Теорема 3. *Если кратный интеграл* $\int f\,dG$ $(n\geqslant 2)$ *сходится, то он и абсолютно сходится.*

Эта неожиданная на первый взгляд теорема связана с отличием определения несобственных интегралов от функций одного и n переменных $(n>1)$, указанным в начале этого параграфа*).

---

*) Отметим, однако, что можно было бы и в n-мерном случае получить качественно ту же связь между сходимостью и абсолютной сходимостью интеграла, что и в одномерном случае, если соответствующим образом ввести определение несобственного n-кратного интеграла. Например, в случае интегралов по всему пространству для этого следует в определении интеграла в качестве элементов монотонно исчерпывающей последовательности брать только n-мерные шары с центром в начале координат.

Доказательство теоремы. Пусть интеграл $\int f dG$ абсолютно расходится, т. е. для некоторой (а значит и для всякой, см. теорему 1 в п. 48.2) последовательности кубируемых множеств G_k, $k = 1, 2, \ldots$, монотонно исчерпывающей открытое множество G, имеем

$$\lim_{k\to\infty} \int |f|\, dG_k = +\infty.$$

Без ограничения общности (переходя, если надо, к подпоследовательности) можно предполагать, что

$$\int |f|\, dG_{k+1} > 3\int |f|\, dG_k + 2k, \quad k = 1, 2, \ldots . \qquad (48.13)$$

Пусть $A_k = G_{k+1} \setminus \overline{G}_k$; тогда A_k — открытое кубируемое множество, и так как $\overline{G}_k \subset G_{k+1}$, то (рис. 157) $G_{k+1} = A_k \cup \overline{G}_k$, и, следовательно,

$$\int |f|\, dG_{k+1} = \int |f|\, dA_k + \int |f|\, dG_k.$$

Отсюда в силу неравенства (48.13)

$$\int |f|\, dA_k > 2\int |f|\, dG_k + 2k.$$

Используя вторую формулу (48.12), получим

$$\int f_+\, dA_k + \int f_-\, dA_k > 2\int |f|\, dG_k + 2k.$$

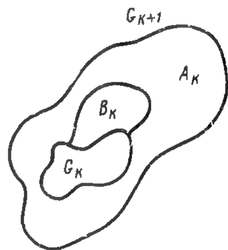


Рис. 157

Пусть для определенности

$$\int f_+\, dA_k \geqslant \int f_-\, dA_k,$$

тогда

$$2\int f_+\, dA_k \geqslant \int f_+\, dA_k + \int f_-\, dA_k > 2\int |f|\, dG_k + 2k,$$

и, следовательно,

$$\int f_+\, dA_k > \int |f|\, dG_k + k. \qquad (48.14)$$

Нашей целью является получение неравенства подобного типа не для функции f_+, а для функции f. Для этого, казалось бы, можно просто отбросить точки, в которых функция f_+ обращается в ноль; тогда на оставшемся множестве имели бы $f = f_+$. Однако получившееся множество может, вообще говоря, оказаться неквадрируемым, поэтому мы будем действовать несколько обходным путем.

Из неравенства (48.14) следует, что при любом достаточно мелком разбиении $\tau = \{E_i\}_{i=1}^{i=i_0}$ множества A_k (см. п. 44.3) для любой интегральной суммы Римана имеем

$$\sum_{i=1}^{i_0} f_+(\xi_i)\operatorname{mes} E_i > \int |f|\, dG_k + k, \quad \xi_i \in E_i, \quad i = 1, 2, \ldots, i_0.$$

Обозначим через E_i^* те множества $E_i \in \tau$, для которых $f_+(\xi) > 0$ во всех точках $\xi \in \bar{E}_i$; тогда, выбирая $\xi_i \in E_i \neq E_i^*$ так, что $f(\xi_i) = 0$, получим

$$\sum_i{}' f_+(\xi_i)\operatorname{mes} E_i^* > \int |f|\, dG_k + k, \tag{48.15}$$

где (а также и в дальнейшем) знак «штрих» у суммы означает, что суммирование распрсстраняется только на те индексы i, для которых $E_i = E_i^*$. Положим

$$B_k = \bigcup_i{}' E_i^*$$

(см. рис. 157). Очевидно, что B_k — открытое кубируемое множество, лежащее в множестве A_k, а $\tau^* = \{E_i^*\}$ является его разбиением. На замыкании этого множества $f_+ > 0$, и следовательно, $f_+ = f$. Из неравенства (48.15) следует, что для нижних сумм Дарбу s_{τ^*} функции f на множестве B_k справедливо неравенство

$$s_{\tau^*} \geqslant \int f\, dG_k + k.$$

Отсюда, очевидно, следует, что

$$\int f\, dB_k \geqslant \int |f|\, dG_k + k. \tag{48.16}$$

Заметим, что $f \geqslant -|f|$ и, следовательно,

$$\int f\, dG_k \geqslant -\int |f|\, dG_k. \tag{48.17}$$

Складывая неравенства (48.16) и (48.17), получим

$$\int f\, dB_k + \int f\, dG_k \geqslant k. \tag{48.18}$$

Пусть $D_k = B_k \cup G_k$, $k = 1, 2, \ldots$. Очевидно, D_k — открытое кубируемое множество и

$$G_k \subset D_k \subset G_{k+1}, \quad k = 1, 2, \ldots. \tag{48.19}$$

В силу того, что множества B_k и G_k не пересекаются (так как не пересекаются множества A_k и G_k), из (48.18) имеем

$$\int f\, dD_k \geqslant k,$$

откуда

$$\lim_{k \to \infty} \int f\, dD_k = +\infty. \tag{48.20}$$

Из включения (48.19) следует, что множества D_k, $k = 1, 2, \ldots$, образуют последовательность кубируемых множеств, монотонно

исчерпывающую открытое множество G, ибо таковой являлась данная последовательность G_k, $k = 1, 2, \ldots$, поэтому равенство (48.20) означает, что интеграл $\int f dG$ расходится.

Теорема доказана.

Итак, для кратных интегралов сходимость несобственного интеграла $\int f dG$ эквивалентна его абсолютной сходимости.

Упражнение 2. Заменив в определении кратного несобственного интеграла всюду открытые множества областями (в частности, рассматривая только монотонно исчерпывающие данную область последовательности, состоящие только из кубируемых областей), показать, что и при таком «более узком» определении кратного несобственного интеграла сохраняется теорема 3.

§ 49. НЕКОТОРЫЕ ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ И ФИЗИЧЕСКИЕ ПРИЛОЖЕНИЯ КРАТНЫХ ИНТЕГРАЛОВ

49.1. Вычисление площадей и объемов

Пусть G — кубируемое открытое множество в E^n. Как известно (см. п. 44.5),

$$\operatorname{mes} G = \int dG. \tag{49.1}$$

Таким образом, с помощью n-кратного интеграла можно вычислять меру кубируемых множеств в n-мерном пространстве (площадь — в двумерном, объем — в трехмерном). Если n-кратный интеграл (49.1) можно свести в повторному (см. § 45), то вычисление меры кубируемого множества G n-мерного пространства сведется к вычислению $(n-1)$-кратного интеграла.

Пусть, например, D — открытое кубируемое множество в $(n-1)$-мерном пространстве $E^{n-1}_{x_1, \ldots, x_{n-1}}$, $x_n = f(x_1, \ldots, x_{n-1})$ — неотрицательная функция, определенная и непрерывная на замыкании $\overline{D}$ множества D, а
$G = \{x = (x_1, \ldots, x_n) : (x_1, \ldots, x_{n-1}) \in D,\ 0 < x_n < f(x_1, \ldots, x_{n-1})\}$ (таким образом, G является n-мерным аналогом криволинейной плоской трапеции, рассмотренной нами в п. 32.1). Тогда

$$\operatorname{mes} G = \int dG = \int dD \int\limits_0^{f(x_1, \ldots, x_{n-1})} dx_n = \int f(x_1, \ldots, x_{n-1})\, dD,$$

т. е.

$$\operatorname{mes} G = \overbrace{\int \ldots \int}^{n-1 \text{ раз}}_D f(x_1, \ldots, x_{n-1})\, dx_1 \ldots dx_{n-1}.$$

Меру произвольных (не обязательно кубируемых), в частности неограниченных, открытых множеств пространства E^n, $n \geqslant 2$, можно вычислить с помощью несобственных интегралов. Действительно, пусть G — произвольное открытое множество в E^n и G_k, $k = 1, 2, \ldots$ — последовательность открытых кубируемых множеств, монотонно исчерпывающих множество G (см. п. 48.1). Тогда, как известно (см. п. 31.2),

$$\lim_{k \to \infty} \operatorname{mes} G_k = \operatorname{mes} G.$$

Но в силу (49.1) $\operatorname{mes} G_k = \int dG_k$, поэтому

$$\operatorname{mes} G = \lim_{k \to \infty} \int dG_k.$$

По определению же кратного несобственного интеграла

$$\lim_{k \to \infty} \int dG_k = \int dG.$$

Таким образом,

$$\operatorname{mes} G = \int dG,$$

где интеграл в правой части понимается, вообще говоря (а именно, если G не является кубируемой областью), как несобственный.

Остается лишь показать, что для любого открытого множества G всегда существует последовательность кубируемых множеств G_k, $k = 1, 2, \ldots$, монотонно исчерпывающая заданное множество G. Докажем это.

Рассмотрим последовательность кубильяжей T_k, $k = 1, 2, \ldots$, пространства E^n (см. п. 44.1) и обозначим через Q_k n-мерный открытый куб, определяемый следующим образом:

$$Q_k = \{(x_i) : |x_i| < k,\ i = 1, 2, \ldots, n\}.$$

Число кубов данного ранга k (см. п. 44.1), содержащихся в кубе Q_k, а следовательно, и подавно в пересечении $G \cap Q_k$, конечно. Обозначим эти замкнутые кубы $P_1, \ldots, P_{j_k}$:

$$P_j \in T_k;\ P_j \subset G \cap Q_k,\ j = 1, 2, \ldots, j_k.$$

Через G_k обозначим множество точек, состоящее из внутренних точек всех кубов $P_1, \ldots, P_{j_k}$, а также точек их границы, не являющихся точками прикосновения для дополнения к множеству точек этих кубов, т. е. не являющихся точками прикосновения для множества

$$E^n \setminus \bigcup_{j=1}^{j_k} P_j.$$

Например, в случае, изображенном на рис. 158, множество G_k состоит из двух квадратов P_1 и P_2 и интервала, получающегося отбрасыванием вершин этих квадратов из их общего ребра.

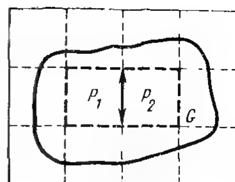


Рис. 158

Множества G_k, $k = 1, 2, \ldots$, и являются открытыми кубируемыми множествами, образующими последовательность, монотонно исчерпывающую данное открытое множество G.

Упражнение 1. Доказать, что построенная последовательность G_k, $k = 1, 2, \ldots$, действительно образует последовательность кубируемых множеств, монотонно исчерпывающую данное множество G.

49.2. Физические приложения кратных интегралов

С помощью кратных интегралов можно вычислять различные физические величины: массу и заряд тела, центр тяжести, момент инерции, поток жидкости, потенциал тела и т. п.

Найдем в качестве примера центр тяжести плоской фигуры. Пусть в некоторой квадрируемой области G распределена некоторая масса, вообще говоря, с переменной плотностью $\rho(x, y)$, т.е. на замыкании $\overline{G}$ области G задана некоторая неотрицательная и непрерывная функция $\rho(x, y)$. Область G с распределенной в ней массой будем называть *фигурой* S, а величину

$$M = \iint\limits_G \rho(x, y)\, dx\, dy \tag{49.2}$$

— ее *массой*. Если $\rho(x, y)$ не тождественный ноль, то $M > 0$.

Определим и найдем центр тяжести фигуры S. Возьмем какое-либо разбиение $\tau = \{G_i\}$, $i = 1, 2, \ldots, k$, области G (см. п. 44.3). Область G_i с распределенной в ней массой плотности $\rho(x, y)$, $(x, y) \in G_i$, назовем фигурой S_i. Выберем по некоторой точке $(\xi_i, \eta_i) \in \overline{G_i}$. Величину $m_i = \rho(\xi_i, \eta_i) \operatorname{mes} G_i$ назовем приближенным значением массы фигуры S_i (естественность такого названия следует из формулы (49.2)). Величины же $m_i \xi_i$ и $m_i \eta_i$ назовем приближенными значениями моментов фигуры S_i, $i = 1, 2, \ldots, k$, соответственно относительно координатных осей Oy и Ox (естественность этого названия следует из того, что моментами материальной точки массы m с координатами (x, y) относительно осей Ox и Oy называются величины my и mx, см. п. 32.6). Наконец, величины

$$\left.\begin{aligned} S_x(\tau) &= \sum_{i=1}^{k} \eta_i m_i = \sum_{i=1}^{k} \eta_i \rho(\xi_i, \eta_i) \operatorname{mes} G_i, \\ S_y(\tau) &= \sum_{i=1}^{k} \xi_i m_i = \sum_{i=1}^{k} \xi_i \rho(\xi_i, \eta_i) \operatorname{mes} G_i \end{aligned}\right\} \qquad (49.3)$$

назовем приближенными τ-моментами фигуры S относительно осей Ox и Oy, а их пределы при $\delta_\tau \to 0$

$$\lim_{\delta_\tau \to 0} S_x(\tau) = S_x, \quad \lim_{\delta_\tau \to 0} S_y(\tau) = S_y$$

— *моментами фигуры* S относительно осей Ox и Oy. Эти пределы при сделанных предположениях существуют. Действительно, из формул (49.3) видно, что $S_x(\tau)$ и $S_y(\tau)$ являются интегральными суммами Римана для функций $y\rho(x, y)$ и $x\rho(x, y)$, поэтому

$$S_x = \iint_G y\rho(x, y)\,dx\,dy, \quad S_y = \iint_G x\rho(x, y)\,dx\,dy. \qquad (49.4)$$

Определение 1. *Точка (x_0, y_0) называется центром тяжести фигуры S, если моменты относительно координатных осей материальной точки массы M, равной массе всей фигуры S, находящейся в точке (x_0, y_0), равны соответствующим моментам фигуры S, т. е. если*

$$Mx_0 = S_y, \quad My_0 = S_x.$$

Из формул (49.2) и (49.4) получаем

$$x_0 = \frac{\iint_G x\rho(x, y)\,dx\,dy}{\iint_G \rho(x, y)\,dx\,dy}, \quad y_0 = \frac{\iint_G y\rho(x, y)\,dx\,dy}{\iint_G \rho(x, y)\,dx\,dy}.$$

Упражнение 2. Доказать, что центр тяжести фигуры не зависит от выбора системы координат.

§ 50. ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ПОВЕРХНОСТЕЙ

50.1. Общие понятия

Определение 1. *Множество S точек трехмерного пространства, заданное как образ замкнутой плоской области $\overline{D}$*) при некотором непрерывном отображении $r(u, v)$, называется пара-*

*) Здесь и в дальнейшем в этом параграфе через D обозначается плоская область.

метрически заданной поверхностью, а отображение $r(u, v)$ — *ее представлением.*

При этом пишется

$$S = \{r(u, v);\ (u, v) \in \overline{D}\}. \tag{50.1}$$

Пусть теперь в рассматриваемом трехмерном пространстве зафиксирована прямоугольная система координат.

Если $\mathbf{r}(u, v)$, $(u, v) \in \overline{D}$, является вектор-функцией, соответствующей отображению $r(u, v)$*), являющемуся представлением поверхности S, то она называется *векторным представлением* данной поверхности и пишется

$$S = \{\mathbf{r}(u, v);\ (u, v) \in \overline{D}\}. \tag{50.2}$$

Если $\mathbf{r}(u, v) = (x(u, v),\ y(u, v),\ z(u, v))$, то совокупность трех функций $x(u, v)$, $y(u, v)$, $z(u, v)$, $(u, v) \in \overline{D}$, называется *координатным представлением* данной поверхности и пишется в виде

$$S = \{x(u, v),\ y(u, v),\ z(u, v);\ (u, v) \in \overline{D}\}. \tag{50.3}$$

Переменные u и v называются параметрами, или координатами, поверхности.

Определение 2. *Пространственная точка* $M = r(u, v)$, $(u, v) \in \overline{D}$, *плюс соответствующие значения параметров* u, v *называются точкой данной параметрически заданной поверхности. Эта точка обозначается* $r(u, v)$. *Сама же пространственная точка* M *называется носителем этой точки поверхности.*

Определение 3. *Совокупность всех носителей точек параметрически заданной поверхности называется носителем этой поверхности.*

Пример. Носителем поверхности

$$x = r\cos\psi\cos\varphi,$$

$$y = r\sin\psi\sin\varphi,$$

$$z = r\sin\psi,$$

$$0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi,\quad -\frac{\pi}{2} \leqslant \psi \leqslant \frac{\pi}{2},$$

является сфера с центром в начале координат и радиуса r.

Определение 4. *Если существуют две различные точки* $(u_1, v_1) \in \overline{D}$ *и* $(u_2, v_2) \in \overline{D}$, *такие, что* $r(u_1, v_1) = r(u_2, v_2)$, *то точка* $M = r(u_1, v_1) = r(u_2, v_2)$ *называется кратной точкой носителя пара-*

---

*) Напомним, что это значит, что точка $r(u, v)$ является концом радиус-вектора $\mathbf{r}(u, v)$.

метрически заданной поверхности (или кратной точкой параметрически заданной поверхности). Параметрически заданная поверхность, имеющая кратные точки, называется поверхностью с самопересечениями.

Как и в случае кривой, для данной поверхности будем допускать различные представления.

Определение 5. *Непрерывное отображение $r=r(u, v)$ замкнутой плоской области $\overline{D}$ в E^3 и непрерывное отображение $\rho=\rho(u_1, v_1)$ замкнутой плоской области $\overline{D_1}$ в E^3 называются эквивалентными, или представлениями одной и той же параметрически заданной поверхности, если существует взаимно однозначное и взаимно непрерывное*) отображение*

$$\left.\begin{aligned} u_1&=\varphi(u, v),\\ v_1&=\psi(u, v),\end{aligned}\right\} \tag{50.4}$$

замкнутой области $\overline{D}$ на $\overline{D}_1$, такое, что

$$r(u, v)=\rho[\varphi(u, v), \psi(u, v)]. \tag{50.5}$$

для всех $(u, v)\in\overline{D}$.

Определение 6. *Если функции (50.3), или вектор-функция (50.2), задающие поверхность, непрерывно дифференцируемы**), то параметрически заданная поверхность S называется непрерывно дифференцируемой.*

В этом случае условие эквивалентности двух представлений поверхности определяется более жестко: *от отображения (50.4), осуществляющего переход от одних параметров к другим, дополнительно требуется непрерывная дифференцируемость как его самого, так и обратного к нему отображения (соответственно на $\overline{D}$ и $\overline{D}_1$).*

Здесь, как и везде, под непрерывной дифференцируемостью в замкнутой области $\overline{D}$ понимается непрерывность частных производных в открытой области D и непрерывная их продолжаемость на границу этой области (см. п 39.3). При этом продолженная функция обозначается тем же символом, что и исходная продолжаемая функция.

---

*) Непрерывно как прямое, так и обратное отображение.

**) Такие понятия, как, например, непрерывность, дифференцируемость естественным образом переносятся и на вектор-функции нескольких переменных. Так, функция $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(u, v)$, определенная на области $\overline{G}$, называется непрерывной в точке $(u_0, v_0)\in\overline{G}$, если $\lim\limits_{(u, v)\to(u_0, v_0)}\boldsymbol{r}(u, v)=\boldsymbol{r}(u_0, v_0)$. Производная $\dfrac{\partial\boldsymbol{r}(u_0, v_0)}{\partial u}$ определяется равенством

$$\frac{\partial\boldsymbol{r}(u_0, v_0)}{\partial u}=\frac{d\boldsymbol{r}(u, v_0)}{du}\bigg|_{u=u_0} \text{ и т. д.}$$

Подобным образом можно определить и другие классы параметрически заданных поверхностей, например, дважды непрерывно дифференцируемые или вообще n раз непрерывно дифференцируемые параметрически заданные поверхности.

Резюмируя, окончательно можно сказать, что *параметрически заданной поверхностью какого-то класса является некоторая совокупность эквивалентных между собой представлений указанного выше вида.*

Понятие эквивалентности определяется в зависимости от выбора класса.

Определение 7. *Преобразования параметров, осуществляющие переход от одного представления поверхности к другому, ему эквивалентному, называются допустимыми.*

Определение 8. *Если за параметры в одном из представлений поверхности можно взять какие-либо две координаты (например, если существует замкнутая область $\overline{D}$ на плоскости xy и функция $z = f(x, y)$, $(x, y) \in \overline{D}$, являющаяся представлением поверхности), то такое представление называется явным.*

Очевидно, что если поверхность допускает явное представление, то она не имеет кратных точек.

Для простоты часто будем называть параметрически заданной поверхностью просто некоторое ее представление $r = r(u, v)$.

Данное выше определение параметрически заданной непрерывной поверхности не охватывает все то, что интуитивно входит в это понятие. Так, можно показать, что поверхность шара не является носителем какой-либо непрерывной параметрически заданной поверхности без кратных точек. Считать же, что поверхность шара имеет кратные точки, представляется неоправданным усложнением. Сформулируем общее определение поверхности.

Определение 9. *Связное (см. определение 24 в п. 18.2) ограниченное замкнутое множество S трехмерного пространства называется поверхностью, (или подробнее, поверхностью без края), если для любой точки $M \in S$ найдется замкнутый шар Q с центром в этой точке, для которого существует взаимно однозначное и непрерывное отображение $r(u, v)$ некоторого замкнутого круга $K \subset E^2$ на $S \cap Q$, причем если (u_0, v_0) центр круга K, то $M = r(u_0, v_0)$*).*

Пара чисел (u, v) называется местными координатами точки $r(u, v) \in S$ на поверхности S.

Лемма 1. *Каждая поверхность является объединением конечного числа носителей параметрически заданных поверхностей.*

Доказательство. Пусть S — поверхность. Для каждой точки $M \in S$ зафиксируем какой-либо из указанных в опреде-

*) Поверхность в смысле этого определения называется также двумерным многообразием.

лении 9 замкнутых шаров с центром в этой точке и обозначим его через Q_M. Пусть r_M — его радиус и пусть Q_M^* — открытый шар того же радиуса r_M с центром в точке M. Имеем

$$S \subset \bigcup_{M \in S} Q_M^*,$$

т. е. система шаров $\{Q_M^*\}$, $M \in S$, образует открытое покрытие ограниченного замкнутого множества S. По лемме Бореля (см. лемму 1 в п. 3.3) из этого покрытия можно выделить некоторое конечное покрытие: $\{Q_{M_1}^*, Q_{M_2}^*, \ldots, Q_{M_k}^*\}$. Очевидно, что система соответствующих замкнутых шаров

$$\{Q_{M_1}, Q_{M_2}, \ldots, Q_{M_k}\}$$

также образует покрытие поверхности S, т. е.

$$S \subset \bigcup_{i=1}^{k} Q_{M_i}.$$

Пусть K_i—круг с центром в точке $(u_i, v_i) \in E_{uv}^2$, $K_i \subset E_{uv}^2$, непрерывно и взаимно однозначно отображающейся отображением $r_i(u, v)$, $(u, v) \in K_i$, на множество $S \cap Q_{M_i}$ так, что

$$r_i(u_i, v_i) = M_i, \ i = 1, 2, \ldots, k.$$

Тогда множество $S \cap Q_{M_i}$ является носителем параметрически заданной непрерывной поверхности

$$\{r_i(u, v), (u, v) \in K_i\}, \ i = 1, 2, \ldots, k,$$

и

$$S = \bigcup_{i=1}^{k} S \cap Q_{M_i}.$$

Лемма доказана.

Упражнение 1. Доказать, что поверхность шара является поверхностью без края.

Дадим теперь определение поверхности с краем.

Определение 10. *Пусть S — ограниченное связное замкнутое множество трехмерного пространства. Пусть для любой точки $M \in S$ существует замкнутый шар Q с центром в этой точке и существует непрерывное взаимно однозначное отображение $r(u,v)$ некоторого замкнутого круга или полукруга K на множество $S \cap Q$, причем, если (u_0, v_0) центр круга или полукруга K, то $r(u_0, v_0) = M$.*

Если K) — полукруг и (u_0, v_0) — его центр, то точка $r(u_0, v_0) = M \in S$ называется краевой точкой множества S.*

Совокупность всех краевых точек множества S называется его краем и обозначается ∂S.

*Множество S, удовлетворяющее указанным выше условиям и такое, что его край ∂S не пуст, называется поверхностью с краем***).*

Всякая точка поверхности с краем, не принадлежащая ее краю, называется *внутренней точкой поверхности*.

Примером поверхности с краем являются боковая поверхность круглого цилиндра и боковая поверхность кругового конуса, имеющих конечные высоты.

Совершенно аналогично лемме 1 можно показать, что каждая поверхность с краем является объединением конечного числа носителей параметрически заданных поверхностей без кратных точек.

В дальнейшем будут изучаться в основном лишь непрерывные поверхности, заданные параметрически, но, вообще говоря, с кратными точками. Там, где это не сможет привести к недоразумениям мы вместо «параметрически заданная поверхность» будем употреблять просто термин «поверхность».

Наконец, отметим несколько другой подход к понятию поверхности. Если $F(x, y, z)$ — непрерывная в некоторой трехмерной области функция, то совокупность точек (x, y, z), таких, что

$$F(x, y, z) = 0, \tag{50.6}$$

называется *поверхностью, заданной неявно*. Не останавливаясь подробно на анализе такого подхода к понятию поверхности, отметим лишь, что в случае, если функция F удовлетворяет в некоторой точке (x_0, y_0, z_0) условиям теоремы о неявных функциях (см. п. 41.1), то часть поверхности (50.6) в некоторой окрестности указанной точки (т. е. пересечение этой окрестности с данной поверхностью) допускает явное представление, и можно сказать, что в этой ситуации поверхность, заданная неявно, локально сводится к поверхности, заданной параметрически. Только такой случай поверхностей, заданных неявно, встретится в дальнейшем, поэтому не будем специально останавливаться на разъяснении тех или иных понятий для поверхностей, заданных неявно.

---

*) Под замкнутым полукругом мы здесь понимаем пересечение замкнутого круга с замкнутой полуплоскостью, лежащей в плоскости круга, граница которой содержит центр круга.

**) Если край ∂S пуст, то множество S является, очевидно, поверхностью без края. Иногда вместо термина «поверхность без края» употребляется термин «замкнутая поверхность». Здесь замкнутость понимается не в смысле замкнутости множества, а именно в смысле отсутствия края.

50.2. Касательная плоскость и нормаль к поверхности

Пусть
$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(u,\ v),\ (u,\ v)\in\overline{D} \tag{50.7}$$
— непрерывно дифференцируемое представление некоторой параметрически задаваемой поверхности.

Будем для простоты считать, что пересечение каждой прямой вида $u=u_0$ или $v=v_0$ с замкнутой областью $\overline{D}$ пусто, или состоит из одного отрезка (быть может, вырождающегося в точку). Пусть, например, пересечение $\overline{D}$ с прямой $v=v_0$ не пусто, тогда
$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(u,\ v_0),\ (u,\ v_0)\in\overline{D}\ (v_0\text{—фиксировано})$$
является представлением некоторой непрерывно дифференцируемой кривой, которая называется *координатной линией* (*u-линией*). Вектор
$$\boldsymbol{r}_u=\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u}=(x_u,\ y_u,\ z_u)$$
является ее касательным вектором. Аналогично определяются координатные линии (*v-линии*)
$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(u_0,\ v)\ (u_0,\ v)\in\overline{D}\ (u_0 \text{ — фиксировано}).$$
и касательные к ним векторы
$$\boldsymbol{r}_v=\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v}=(x_v,\ y_v,\ z_v).$$

Определение 11. *Точка параметрически заданной поверхности, для которой векторы $\boldsymbol{r}_u$ и $\boldsymbol{r}_v$ не коллинеарны (т. е. линейно независимы), называется неособой, в противном случае — особой.*

Если точка поверхности неособая, то в ней, в частности,
$$\boldsymbol{r}_u\neq 0,\ \boldsymbol{r}_v\neq 0.$$

Очевидно, что точка параметрически заданной поверхности является неособой в том и только в том случае, когда в этой точке
$$\boldsymbol{r}_u\times \boldsymbol{r}_v\neq 0.$$

Упражнение 2. Доказать, что в окрестности каждой неособой точки поверхность допускает явное представление относительно одной из осей координат.

Рассмотрим кривую на параметрически заданной поверхности (50.7), заданную непрерывно дифференцируемыми функциями
$$u=u(t),\ v=v(t),\ a\leqslant t\leqslant b,$$
т. е. представлением
$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}[u(t),\ v(t)],\ a\leqslant t\leqslant b. \tag{50.8}$$

Дифференцируя это равенство, получим

$$d\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_u\, du + \boldsymbol{r}_v\, dv, \tag{50.9}$$

здесь $du = u'(t)dt$, $dv = v'(t)dt$. Вектор $d\boldsymbol{r}$ является касательным к кривой (50.8). Равенство (50.9) показывает, что в данной точке $r(u_0, v_0)$ поверхности (50.7) касательная к любой кривой (50.8) на этой поверхности, проходящей через точку $r(u_0, v_0)$, лежит в плоскости векторов $\boldsymbol{r}_u(u_0, v_0)$ и $\boldsymbol{r}_v(u_0, v_0)$.

Определение 12. *Плоскость, проходящая через точку $r(u_0, v_0)$ параметрически заданной поверхности (50.7), в которой лежат все касательные к кривым (50.8), проходящим через эту точку, называется касательной плоскостью к поверхности в данной точке (называемой точкой касания).*

Если данная точка поверхности (50.7) неособая, то в ней всегда существует и притом единственная касательная плоскость: именно в силу (50.9) такой плоскостью является плоскость, проходящая через точку $r(u_0, v_0)$ параллельно векторам $\boldsymbol{r}_u(u_0, v_0)$ и $\boldsymbol{r}_v(u_0, v_0)$. Отсюда легко написать ее уранение в векторном виде. Обозначая через $\boldsymbol{r}_0$ радиус-вектор точки касания, а через $\boldsymbol{r}$ — текущий радиус-вектор точек на касательной плоскости, получим (рис. 159)

$$(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0)\boldsymbol{r}_u\boldsymbol{r}_v = 0. \tag{50.10}$$

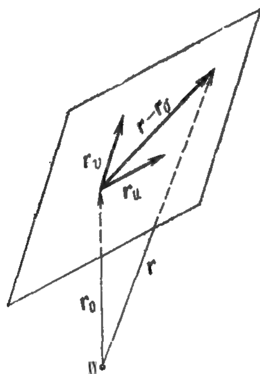


Рис. 159

Если $\boldsymbol{r} = (x, y, z)$, $\boldsymbol{r}_0 = (x_0, y_0, z_0)$, $\boldsymbol{r}_u = (x_u, y_u, z_u)$, $\boldsymbol{r}_v = (x_v, y_v, z_v)$, то уравнение (50.10) в координатном виде перепишется следующим образом:

$$\begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \end{vmatrix} = 0.$$

В случае явного задания поверхности

$$z=f(x,\ y),\ (x,\ y)\in\bar{D}, \tag{50.11}$$

в виде

$$\begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ 1 & 0 & f_x \\ 0 & 1 & f_y \end{vmatrix}=0, \tag{50.12}$$

откуда $(x-x_0)f_x+(y-y_0)f_y-(z-z_0)=0$, где через f_x и f_y для краткости обозначены частные производные $f_x(x,\ y)$ и $f_y(x,\ y)$ в точке $(x_0,\ y_0)$.

Из этой формулы следут, что два определения касательной плоскости для поверхности с явным представлением (50.11), данные в настоящем пункте и ранее в пункте 20.5, эквивалентны. В самом деле, оба определения приводят к одному и тому же уравнению (50.12).

Определение 13. *Прямая, проходящая через точку касания поверхности с касательной плоскостью и перпендикулярная этой плоскости, называется нормальной прямой к параметрически заданной поверхности.*

Ее уравнение в общем случае имеет вид

$$\frac{x-x_0}{\begin{vmatrix} y_u & z_u \\ y_v & z_v \end{vmatrix}}=\frac{y-y_0}{\begin{vmatrix} z_u & x_u \\ z_v & x_v \end{vmatrix}}=\frac{z-z_0}{\begin{vmatrix} x_u & y_u \\ x_v & y_v \end{vmatrix}}.$$

В случае явного представления (50.11) эти уравнения принимают вид

$$\frac{x-x_0}{f_x}=\frac{y-y_0}{f_y}=-(z-z_0). \tag{50.13}$$

Определение 14. *Всякий ненулевой вектор, параллельный нормальной прямой, проходящей через данную точку поверхности, называется нормалью к параметрически заданной поверхности в указанной точке.*

Примером нормали в неособой точке поверхности является векторное произведение

$$\boldsymbol{n}=\boldsymbol{r}_u\times\boldsymbol{r}_v,$$

вычисленное в рассматриваемой точке.

По определению в каждой неособой точке данной поверхности существует и притом единственная нормальная прямая. В точках же носителя поверхности может оказаться, что это и не так: если некоторая точка пространства является носителем двух или более точек данной поверхности, то может случиться, что в точке носителя имеется несколько различных нормальных прямых*).

*) Нормаль (нормальная прямая), в некоторой точке поверхности называется также нормалью (нормальной прямой) в носителе этой точки.

Для поверхности, заданной неявно уравнением

$$F(x,\ y,\ x) = 0,$$

где $F(x, y, z)$ — непрерывно дифференцируемая в окрестности точки (x_0, y_0, z_0) функция, $F(x_0, y_0, z_0) = 0$, и в этой точке $F_x^2 + F_y^2 + F_z^2 > 0$, уравнение касательной плоскости в точке (x_0, y_0, z_0) имеет вид

$$(x - x_0) F_x + (y - y_0) F_y + (z - z_0) F_z = 0,$$

а уравнение нормальной прямой —

$$\frac{x - x_0}{F_x} = \frac{y - y_0}{F_y} = \frac{z - z_0}{F_z},$$

где F_x, F_y и F_z обозначают значения соответствующих частных производных, взятых в точке (x_0, y_0, z_0).

Эти формулы сразу следуют из формул (50.12) и (50.13). Действительно, если, например, $F_z \neq 0$ и $z = f(x, y)$—функция, определяемая уравнением $F = 0$ в окрестности точки (x_0, y_0, z_0), то достаточно заметить, что $f_x = -\frac{F_x}{F_z}$, $f_y = -\frac{F_y}{F_z}$ (см. п. 41.1).

Если функция $F(x, y, z)$ задана и непрерывно дифференцируема в области G, то для любой точки поверхности, заданной неявно уравнением

$$F(x,\ y,\ z) = c$$

(c — постоянная), получим уравнение касательной плоскости и нормальной прямой того же вида, что и в случае $F = 0$, если только в этой точке $F_x^2 + F_y^2 + F_z^2 > 0$. Множество точек $(x, y, z) \in G$, для которых $F = c$, называется *поверхностью уровня функции* F. Вектор (F_x, F_y, F_z) является градиентом функции F (см. п. 20.6) и направлен по нормальной прямой к поверхности уровня. Иначе говоря, если градиент функции F отличен от нуля, то он перпендикулярен к поверхности уровня (т. е. перпендикулярен касательной плоскости к поверхности уровня в рассматриваемой точке).

Мы доказали существование касательной плоскости в неособой точке у параметрически заданной поверхности при фиксированном ее представлении. Возникает вопрос: что будет, если перейти к другому представлению поверхности? останется ли неособая точка неособой? Оказывается, что для того, чтобы неособые точки оставались неособыми, необходимо и достаточно, чтобы допускались только такие преобразования параметров (50.4), у которых всюду

$$\frac{\partial (u_1,\ v_1)}{\partial (u,\ v)} = \begin{vmatrix} \varphi_u & \varphi_v \\ \psi_u & \psi_v \end{vmatrix} \neq 0. \qquad (50.14)$$

Пусть $\boldsymbol{r}(u, v)$ и $\boldsymbol{r}(u_1, v_1)$ — два представления одной и той же поверхности. Чтобы не усложнять обозначений и подчеркнуть, что речь идет об одной и той же поверхности, второе представление обозначено через $\boldsymbol{r}(u_1, v_1)$, а не через $\boldsymbol{\rho}(u_1, v_1)$ как раньше (см. 50.5). Это не приведет к недоразумениям, если помнить, что $\boldsymbol{r}(u, v)$ и $\boldsymbol{r}(u_1, v_1)$ — разные функции. Пусть координаты u, v и u_1, v_1 связаны допустимым преобразованием (50.4), тогда справедливо тождество

$$\boldsymbol{r}(u, v) = \boldsymbol{r}(\varphi(u, v), \psi(u, v)).$$

Дифференцируя его, получим

$$\left.\begin{aligned} \boldsymbol{r}_u &= \varphi_u \boldsymbol{r}_{u_1} + \psi_u \boldsymbol{r}_{v_1}, \\ \boldsymbol{r}_v &= \varphi_v \boldsymbol{r}_{u_1} + \psi_v \boldsymbol{r}_{v_1}. \end{aligned}\right\} \tag{50.15}$$

Следовательно, пара векторов $\boldsymbol{r}_{u_1}$, $\boldsymbol{r}_{v_1}$ преобразуется в пару векторов $\boldsymbol{r}_u$, r_v с помощью матрицы

$$\begin{Vmatrix} \varphi_u & \psi_u \\ \varphi_v & \psi_v \end{Vmatrix},$$

поэтому если для данной точки векторы $\boldsymbol{r}_{u_1}$ и $\boldsymbol{r}_{v_1}$ линейно независимы, то векторы $\boldsymbol{r}_u$ и $\boldsymbol{r}_v$ будут линейно независимы тогда и только тогда, когда будет выполнено условие (59.14).

Определение 15. *Непрерывно дифференцируемая параметрически заданная поверхность, у которой нет особых точек, называется гладкой.*

При этом для гладких поверхностей допустимыми преобразованиями параметра (50.4) являются взаимно однозначные, взаимно непрерывно дифференцируемые отображения, с якобианом, не равным нулю на $\overline{D}$.

Определение 16. *Пусть S — поверхность с краем или без края (в смысле определений 9 и 10) и пусть для каждой точки $M \in S$ существует такой замкнутый шар Q с центром в этой точке, что множество $S \cap Q$ является носителем некоторой гладкой параметрически заданной поверхности $S_M = \{\boldsymbol{r}(u, v);\ (u, v) \in K\}$ без кратных точек, где K — круг или полукруг с центром в точке (u_0, v_0) и $M = r(u_0, v_0)$. Поверхность S, для которой выполняется это условие, называется гладкой.*

Касательная плоскость (нормаль) к параметрически заданной поверхности S_M в точке M называется касательной плоскостью (нормалью) к поверхности S в этой точке.

Мы не будем останавливаться на вопросе о независимости касательной плоскости и нормали от выбора местной системы координат.

Упражнение 3. Доказать, что всякая гладкая поверхность с краем является объединением конечного числа носителей параметрически заданных гладких поверхностей.

50.3. Первая квадратичная форма поверхности

Зафиксируем какое-либо представление данной гладкой параметрически заданной поверхности и рассмотрим некоторую ее касательную плоскость. Как мы видели, векторы $\boldsymbol{r}_u$ и $\boldsymbol{r}_v$ образуют в ней естественный базис. Векторы, лежащие в касательной плоскости, будем обозначать символом $d\boldsymbol{r}$, а их координаты относительно базиса $\boldsymbol{r}_u$ и $\boldsymbol{r}_v$ через du и dv*). Таким образом,

$$d\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_u\,du + \boldsymbol{r}_v\,dv.$$

Найдем квадрат длины вектора, лежащего в касательной плоскости, выраженный через координаты естественного базиса $\boldsymbol{r}_u$, $\boldsymbol{r}_v$ (в линейной алгебре это выражение обычно называется *основной метрической формой* рассматриваемого пространства, в данном случае плоскости):

$$|d\boldsymbol{r}|^2 = (\boldsymbol{r}_u\,du + \boldsymbol{r}_v\,dv)^2 = \boldsymbol{r}_u^2\,du^2 + 2\boldsymbol{r}_u\boldsymbol{r}_v\,du\,dv + \boldsymbol{r}_u^2\,dv^2.$$

Введем обозначения

$$E = \boldsymbol{r}_u^2,\ F = \boldsymbol{r}_u\boldsymbol{r}_v,\ G = \boldsymbol{r}_v^2, \tag{50.16}$$

тогда

$$|d\boldsymbol{r}|^2 = E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2. \tag{50.17}$$

Определение 17. *Квадратичная форма*

$$E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2$$

*называется первой квадратичной формой поверхности***).

Посмотрим, как она меняется при переходе к другому представлению поверхности (см. формулы (50.4)). Как известно (см. (50.15)), при этом базисы в рассматриваемой плоскости преобразуются с помощью матрицы

$$\begin{Vmatrix} \varphi_u & \psi_u \\ \varphi_v & \psi_v \end{Vmatrix}.$$

Следовательно, координаты векторов преобразуются с помощью транспонированной матрицы, т. е. матрицы Якоби

$$J = \begin{Vmatrix} \varphi_u & \varphi_v \\ \psi_u & \psi_v \end{Vmatrix}.$$

---

*) Это обозначение естественно, ибо если вектор в касательной плоскости является касательным к некоторой кривой (50.8) на поверхности, то при соответствующем выборе параметра этот вектор будет являться дифференциалом вектора (50.8) и, следовательно, для него будет выполняться равенство (50.9).

**) То, что рассматриваемая квадратичная форма называется *первой*, объясняется тем, что существуют другие квадратичные формы, связанные с поверхностью. Их изучение не входит в задачу настоящего курса.

Если матрицу первой квадратичной формы (50.17) при представлении поверхности $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(u, v)$ обозначить через A, а при представлении $\boldsymbol{\rho} = \boldsymbol{\rho}(u_1, v_1)$ через A_1, т. е

$$A = \begin{Vmatrix} E & F \\ F & G \end{Vmatrix}, \; E = \boldsymbol{r}_u^2, \; F = \boldsymbol{r}_u \boldsymbol{r}_v, \; G = \boldsymbol{r}_v^2,$$

$$A_1 = \begin{Vmatrix} E_1 & F_1 \\ F_1 & G_1 \end{Vmatrix}, \; E_1 = \boldsymbol{\rho}_{u_1}^2, \; F_1 = \boldsymbol{\rho}_{u_1} \boldsymbol{\rho}_{v_1}, \; G_1 = \boldsymbol{\rho}_{v_1}^2,$$

то, как известно из курса линейной алгебры, для первой квадратичной формы поверхности, как и вообще для всякой квадратичной формы,

$$A = J^* A_1 J,$$

где через J^* обозначена матрица, транспонированная с матрицей Якоби J.

Отсюда для соответствующих определителей

$$\begin{vmatrix} E & F \\ F & G \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} E_1 & F_1 \\ F_1 & G_1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \varphi_u & \varphi_v \\ \psi_u & \psi_v \end{vmatrix}^2,$$

или

$$EG - F^2 = \left(E_1 G_1 - F_1^2\right) \left| \frac{\partial (u_1, v_1)}{\partial (u, v)} \right|^2. \tag{50.18}$$

Заметим, что по самому своему определению первая квадратичная форма является положительно определенной квадратичной формой, поэтому ее дискриминант $EG - F^2$ положителен. Из определения коэффициентов E и G (см. 50.16) непосредственно следует также, что

$$E > 0 \text{ и } G > 0.$$

Знание первой квадратичной формы поверхности позволяет решать ряд задач на параметрически заданной поверхности, например, находить длины кривых и углы между ними, вычислять площадь поверхности. К рассмотрению этих задач мы и перейдем.

50.4. Кривые на поверхности. Вычисление их длин и углов между ними

Рассмотрим непрерывно дифференцируемую кривую (50.8), лежащую на данной параметрически заданной поверхности (50.2). Предположим, что отсчет длины дуг $s = s(t)$ на ней производится в направлении возрастания параметра, т. е. что $\frac{ds}{dt} > 0$. Как известно (см. п. 16.3),

$$\frac{ds}{dt} = \left|\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}\right|,$$

но

$$\left|\frac{dr}{dt}\right|^2 = \left|\boldsymbol{r}_u \frac{du}{dt} + \boldsymbol{r}_v \frac{dv}{dt}\right|^2 = E\left(\frac{du}{dt}\right)^2 + 2F\frac{du}{dt}\frac{dv}{dt} + G\left(\frac{dv}{dt}\right)^2$$

и поэтому

$$\frac{ds}{dt} = \sqrt{E\left(\frac{du}{dt}\right)^2 + 2F\cdot\frac{du}{dt}\cdot\frac{dv}{dt} + G\left(\frac{dv}{dt}\right)^2}.$$

Таким образом, для длины S кривой (50.8) получаем формулу

$$S = \int_a^b \sqrt{E\left(\frac{du}{dt}\right)^2 + 2F\frac{du}{dt}\cdot\frac{dv}{dt} + G\left(\frac{dv}{dt}\right)^2}\, dt.$$

Перейдем теперь к вычислению углов между кривыми на параметрически заданной поверхности.

Определение 18. *Если две кривые пересекаются в некоторой точке, то углом между ними в этой точке называется угол, образованный их касательными в указанной точке (если, конечно, эти касательные существуют).*

Пусть две гладкие кривые, лежащие на рассматриваемой поверхности, пересекаются в некоторой точке. Обозначим дифференциалы их представлений в этой точке соответственно через $d\boldsymbol{r}$ и $\delta\boldsymbol{r}$, а коэффициенты разложений по векторам $\boldsymbol{r}_u$ и $\boldsymbol{r}_v$ соответственно через du, dv и δu, δv, тогда

$$d\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_u\, du + \boldsymbol{r}_u\, dv,$$
$$\delta\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_u\, \delta u + \boldsymbol{r}_v\, \delta v.$$

Поэтому если φ — искомый угол между кривыми, т. е. между векторами $d\boldsymbol{r}$ и $\delta\boldsymbol{r}$, то

$$\cos\varphi = \frac{d\boldsymbol{r}\,\delta\boldsymbol{r}}{|d\boldsymbol{r}|\,|\delta\boldsymbol{r}|} =$$

$$= \frac{E\,du\,\delta u + F\,(du\,\delta v + dv\,\delta u) + G\,dv\,\delta v}{\sqrt{E du^2 + 2F du dv + G dv^2}\,\sqrt{E\,\delta u^2 + 2F\,\delta u\,\delta v + G\delta v^2}}.$$

Упражнение 4. Доказать, что, для того чтобы координатные u- и v-линии на поверхности были ортогональны, необходимо и достаточно, чтобы всюду на поверхности имело место $F = 0$.

50.5. Площадь поверхности

Пусть представление (50.2) рассматриваемой гладкой поверхности определено на замкнутой квадрируемой области $\overline{D}$. Разобьем плоскость uv линиями $u = \text{const}$ и $v = \text{const}$ на какие-либо прямоугольники: тогда область $\overline{D}$ окажется покрытой конеч-

ным их числом. Перенумеруем каким-либо образом пересечения внутренностей (множеств их внутренних точек) этих прямоугольников с областью D и обозначим их через E_i, $i = 1, 2, \ldots, i_0$. Тогда $\tau = \{E_i\}_{i=1}^{i=i_0}$ образует разбиение области D (см. п. 44.3). Рассмотрим одно из тех E_i (рис. 160), которое представляет собой полный прямоугольник (при достаточно малой мелкости разбиения τ такие множества E_i всегда существуют, почему?). Пусть длины сторон этого прямоугольника соответственно Δu и Δv, P_i — одна из его вершин. Тогда при переходе от вершины P_i к соседним вершинам радиус-вектор получит приращения с точностью до бесконечно малых более высоких порядков равные по абсолютной величине соответственно числам $|\boldsymbol{r}_u \Delta u|$, $|\boldsymbol{r}_v \Delta v|$.

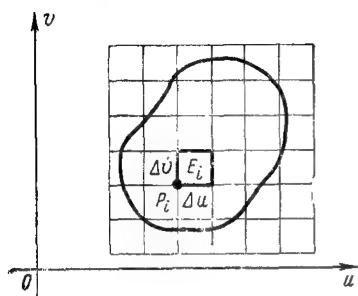


Рис. 160

При определении площади поверхности мы будем образы множеств E_i заменять прямолинейными параллелограммами, построенными на векторах $\boldsymbol{r}_u \Delta u$ и $\boldsymbol{r}_v \Delta v$ (рис. 161). Найдем площадь такого параллелограмма. Обозначая ее через $\Delta\sigma_i$, получим

$$\Delta\sigma_i = |\boldsymbol{r}_u \Delta u \times \boldsymbol{r}_v \Delta v| = |\boldsymbol{r}_u \times \boldsymbol{r}_v|_{P_i} |\Delta u| |\Delta v| = |\boldsymbol{r}_u \times \boldsymbol{r}_v|_{P_i} \operatorname{mes} E_i.$$

Функции $\boldsymbol{r}_u$ и $\boldsymbol{r}_v$ непрерывны на замкнутой квадрируемой области, поэтому (см. п. 44.5)

$$\lim_{\delta_\tau \to 0} \sum{}' \Delta\sigma_i = \iint_D |\boldsymbol{r}_u \times \boldsymbol{r}_v| \, du \, dv. \tag{50.19}$$

Здесь штрих у суммы означает, что суммирование распространено только на те индексы i, для которых E_i — полный прямоугольник, т. е. E_i не пересекается с границей ∂D области D. Как известно (см. п. 44.5), добавление остальных слагаемых интегральной суммы не влияет на величину предела (50.19).

Определение 19. *Предел* (50.19) *называется площадью или мерой* $\operatorname{mes} S$ *поверхности* S

$$\operatorname{mes} S = \lim_{\delta \to 0} \sum{}' \Delta\sigma_i.$$

Для вычисления площади поверхности из (50.19) непосредственно получается формула

$$\operatorname{mes} S = \iint\limits_D |\boldsymbol{r}_u \times \boldsymbol{r}_v| \, du \, dv. \tag{50.20}$$

Покажем, что величина площади поверхности не зависит от выбора ее представления.

Прежде всего заметим, что для любых двух векторов $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ справедливы формулы

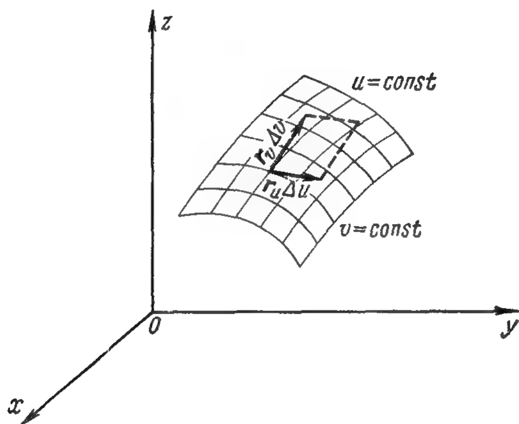


Рис. 161

$$|\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}| = |\boldsymbol{a}| |\boldsymbol{b}| \sin \boldsymbol{ab},$$
$$\boldsymbol{ab} = |\boldsymbol{a}| |\boldsymbol{b}| \cos \widehat{\boldsymbol{ab}}, \tag{50.21}$$

где $\widehat{\boldsymbol{ab}}$ —угол между векторами $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$. Возведем в квадрат и сложим эти формулы:

$$|\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}|^2 + |\boldsymbol{a}\,\boldsymbol{b}|^2 = \boldsymbol{a}^2 \boldsymbol{b}^2.$$

В частности,

$$|\boldsymbol{r}_u \times \boldsymbol{r}_v|^2 = \boldsymbol{r}_u^2 \boldsymbol{r}_v^2 - (\boldsymbol{r}_u \boldsymbol{r}_v)^2 = EG - F^2, \tag{50.22}$$

поэтому формула (50.20) может быть записана также в виде

$$\operatorname{mes} S = \iint\limits_D \sqrt{EG - F^2} \, du \, dv. \tag{50.23}$$

Иногда для краткости записи выражение $\sqrt{FG - F^2} \, du \, dv$ обозначается символом dS:

$$dS = \sqrt{EG - F^2} \, du \, dv \tag{50.24}$$

и называется *элементом площади*. Применяя это обозначение, формулу (50.23) можно переписать в виде

$$\operatorname{mes} S = \iint\limits_{D} dS.$$

Перейдем теперь к другому представлению $\rho = \rho(u_1, v_1)$ данной поверхности, которое задано на замыкании $\overline{D}_1$ квадрируемой области D_1 и для которого преобразование (50.4) параметров u, v в u_1, v_1 взаимно однозначно и непрерывно дифференцируемо на D и имеет на D не равный нулю якобиан.

В новой системе координат рассмотрим интеграл

$$S_1 = \iint\limits_{D_1} \sqrt{E_1 G_1 - F_1^2}\, du_1\, dv_1.$$

Для сравнения его с интегралом (50.23) сделаем замену переменных (50.4), что возможно, так как все предпосылки теоремы 3 п. 46.4 в данном случае выполнены. Используя (50.18), получим

$$\operatorname{mes} S_1 = \iint\limits_{D_1} \sqrt{E_1 G_1 - F_1^2}\, du_1\, dv_1 =$$

$$= \iint\limits_{D} \sqrt{E_1 G_1 - F_1^2} \left|\frac{\partial(\varphi, \psi)}{\partial(u, v)}\right| du\, dv = \iint\limits_{D} \sqrt{EG - F^2}\, du\, dv = \operatorname{mes} S.$$

Таким образом, действительно, величина площади поверхности не зависит от выбора ее представления.

Найдем выражение для площади поверхности, имеющей явное представление $z = f(x, y)$, $(x, y) \in \overline{D}$. В этом случае $u = x$, $v = y$,

$$\boldsymbol{r} = (x, y, f(x, y))$$

и, следовательно,

$$\boldsymbol{r}_u = (1, 0, f_x),\ \ \boldsymbol{r}_v = (0, 1, f_y),$$

$$E = \boldsymbol{r}_u^2 = 1 + f_x^2,\ \ F = \boldsymbol{r}_u \boldsymbol{r}_v = f_x f_y,\ \ G = \boldsymbol{r}_v^2 = 1 + f_y^2,$$

$$EG - F^2 = (1 + f_x^2)(1 + f_y^2) - f_x^2 f_y^2 = 1 + f_x^2 + f_y^2; \tag{50.25}$$

поэтому

$$S = \iint\limits_{D} \sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}\, dx\, dy.$$

З а м е ч а н и е. Из формул (50.22) и (50.18) получаем, что

$$|\boldsymbol{r}_u \times \boldsymbol{r}_v| = |\boldsymbol{r}_{u_1} \times \boldsymbol{r}_{v_1}| \left|\frac{\partial(u_1, v_1)}{\partial(u, v)}\right|.$$

Отсюда еще раз (см. п. 50.2) следует, что, если якобиан перехода от одной системы координат на поверхности к другой системе координат не равен нулю, то неособая точка в одной системе координат будет неособой и в другой (напомним, что условие $\boldsymbol{r}_u \times \boldsymbol{r}_v \neq 0$ является необходимым и достаточным условием для того, чтобы точка поверхности была неособой).

50.6. Ориентация поверхности. Ориентируемые и неориентируемые поверхности

В этом параграфе будем предполагать, что в пространстве выбирается всегда правая система координат. Это означает следующее. Пусть $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$ и $\boldsymbol{k}$ — единичные орты координатных осей. Если смотреть из конца вектора $\boldsymbol{k}$ на плоскость xOy, то вектор $\boldsymbol{i}$ надо повернуть на 90° против часовой стрелки, чтобы он совпал с вектором $\boldsymbol{j}$. В этом случае говорят также, что упорядоченная тройка векторов $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$ и $\boldsymbol{k}$ согласована по «правилу штопора». Аналитически это означает, что в пространстве точек (x, y, z) рассматриваются только такие упорядоченные базисы $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_3$, которые получаются из упорядоченного базиса $\boldsymbol{i} = (1; 0; 0)$, $\boldsymbol{j} = (0; 1; 0)$, $\boldsymbol{k} = (0; 0; 1)$ с помощью матриц, имеющих положительный определитель (более точно, равный $+1$). Таким образом, если

$$\boldsymbol{e}_m = c_{m1}\boldsymbol{i} + c_{m2}\boldsymbol{j} + c_{m3}\boldsymbol{k}, \quad m = 1, 2, 3,$$

то

$$\begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{vmatrix} = +1.$$

Все определения и понятия, связанные с координатами, вводимые ниже в этом параграфе, даются применительно к правым системам координат.

Пусть S — гладкая поверхность, заданная параметрически. Тогда существует такое непрерывно дифференцируемое представление $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(u, v)$, $(u, v) \in \overline{D}$, этой поверхности, что $\boldsymbol{r}_u \times \boldsymbol{r}_v \neq 0$ на $\overline{D}$ и, следовательно, в каждой точке поверхности S определен нормальный единичный вектор

$$\boldsymbol{\nu} = \frac{\boldsymbol{r}_u \times \boldsymbol{r}_v}{|\boldsymbol{r}_u \times \boldsymbol{r}_v|}, \tag{50.26}$$

являющийся непрерывной функцией на $\overline{D}$. Кратко это обстоятельство выражают, говоря, что на поверхности S существует непрерывная единичная нормаль.

Определение 20. *Всякая непрерывная единичная нормаль* $\boldsymbol{\nu}=\boldsymbol{\nu}(u, v)$, $(u, v) \in \overline{D}$, *гладкой параметрически заданной поверхности* $S = \{\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(u, v);\ (u, v) \in \overline{D}\}$ *называется ориентацией поверхности* S.

Очевидно, что если вектор $\boldsymbol{\nu}$ является ориентацией параметрически заданной поверхности S, то и вектор $-\boldsymbol{\nu}$ также является ориентацией той же поверхности, и легко показать, что других ориентаций нет.

Упражнение 5. Доказать, что параметрически заданная поверхность S может иметь только две ориентации.

Одна из двух ориентаций $\boldsymbol{\nu}$ или $-\boldsymbol{\nu}$ (произвольно выбранная) называется *положительной*, а другая — *отрицательной*.

Для определенности в дальнейшем для гладкой поверхности, заданной фиксированным векторным представлением $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(u, v)$, $(u, v) \in \overline{D}$, за *положительную ориентацию* будем принимать всегда вектор (50.26).

Таким образом, понятие положительности и отрицательности ориентации в этом смысле не определяется однозначно самой поверхностью, а зависит от выбора ее представления.

Чтобы при взаимно однозначном непрерывно дифференцируемом преобразовании параметров u и v с якобианом, не равным нулю, у поверхности сохранялась ориентация, необходимо дополнительно потребовать, чтобы якобиан этого преобразования был положительным. Действительно, для преобразования параметров

$$u_1 = \varphi(u, v),$$
$$v_1 = \psi(u, v)$$

из формул (50.15) имеем

$$\boldsymbol{r}_u \times \boldsymbol{r}_v = (\varphi_u \boldsymbol{r}_{u_1} + \psi_u \boldsymbol{r}_{v_1}) \times (\varphi_v \boldsymbol{r}_{u_1} + \psi_v \boldsymbol{r}_{v_1}) = \frac{\partial(u_1, v_1)}{\partial(u, v)} (\boldsymbol{r}_{u_1} \times \boldsymbol{r}_{v_1}).$$

Таким образом, для поверхностей, у которых выбрана ориентация, допустимыми преобразованиями будем считать такие непрерывно дифференцируемые преобразования, у которых якобиан положителен.

Поверхность S с положительной ориентацией мы будем обозначать через S^+, а с отрицательной — через S^-.

Данное выше определение ориентации, разумеется, не переносится на негладкие поверхности. Примером поверхности, не дифференцируемой в одной точке, на которой уже нельзя выбрать непрерывную нормаль, является конус:

$$z = \sqrt{x^2 + y^2},\quad x^2 + y^2 \leqslant a^2. \tag{50.27}$$

В этом случае векторное представление имеет вид $\boldsymbol{r}(x, y) = (x, y, \sqrt{x^2 + y^2})$. Следовательно,

$$\boldsymbol{r}_x = \left(1; 0; \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right), \quad \boldsymbol{r}_y = \left(0; 1; \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right);$$

$$\boldsymbol{r}_x \times \boldsymbol{r}_y = \left(-\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}; \ -\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}; \ 1\right);$$

$$|\boldsymbol{r}_x \times \boldsymbol{r}_y| = \sqrt{2}.$$

Поскольку пределы

$$\lim_{(x,\,y)\to(0,0)} \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \quad \text{и} \quad \lim_{(x,\,y)\to(0,0)} \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

не существуют (почему?), то и единичная нормаль

$$\boldsymbol{\nu} = \frac{\boldsymbol{r}_x \times \boldsymbol{r}_y}{|\boldsymbol{r}_x \times \boldsymbol{r}_y|} = \left(-\frac{x}{\sqrt{2(x^2+y^2)}}; \ -\frac{y}{\sqrt{2(x^2+y^2)}}; \ \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

не имеет предела при $(x, y) \to (0, 0)$. Поэтому на конусе (50.27) нельзя выбрать нормаль, непрерывную на $\overline{D} = \{(x, y): x^2 + y^2 \leqslant a^2\}$.

Чтобы обойти эту неприятность, мы введем более слабое понятие ориентации. Предварительно введем понятие внутренней и краевой точки для поверхности, заданной параметрически.

Определение 21. *Точка параметрически заданной поверхности*

$$S = \{\boldsymbol{r}(u, v), \ (u, v) \in \overline{D}\}, \tag{50.28}$$

соответствующая значениям параметров u, v, таким, что $(u, v) \in D$, называется внутренней точкой поверхности.

Точка же, соответствующая таким значениям параметров u, v, что $(u, v) \in \partial D$, называется краевой точкой поверхности.

Множество всех краевых точек называется краем ∂S параметрически заданной поверхности S.

Это обозначение естественно, так как всякая замкнутая плоская область $\overline{D} \subset E^2_{xy}$ является носителем параметрически заданной поверхности S с представлением $x = x$, $y = y$, $z = 0$, $(x, y) \in \overline{D}$, являющимся, очевидно, тождественным отображением $\overline{D}$ на себя. Носитель края ∂S этой поверхности совпадает с границей ∂D области D.

Определение 22. *Параметрически заданная поверхность* (50.28) *называется гладкой во внутренних точках, если ее векторное представление $\boldsymbol{r}(u, v)$ непрерывно дифференцируемо на D и каждая точка поверхности, соответствующая $(u, v) \in D$, является неособой.*

Определение 23. *Всякая непрерывная на D единичная нормаль $\boldsymbol{\nu} = \boldsymbol{\nu}(u, v)$, $(u, v) \in D$, параметрически заданной поверхности* (50.28), *гладкой во внутренних точках, называется ориентацией этой поверхности.*

Следует, конечно, иметь в виду, что далеко не всегда нормаль $\boldsymbol{\nu}$ можно непрерывно продолжить с D на $\overline{D}$. Это было показано выше на примере обыкновенного конуса.

На рис. 162 изображена гладкая во внутренних точках поверхность, у которой целый отрезок состоит из точек, в которые нормаль $\mathbf{v}$ нельзя непрерывно продолжить. Наглядно эта поверхность может быть получена из прямоугольника $ABCD$ (см. рис. 162) путем «склейки под углом» его сторон AB и DC.

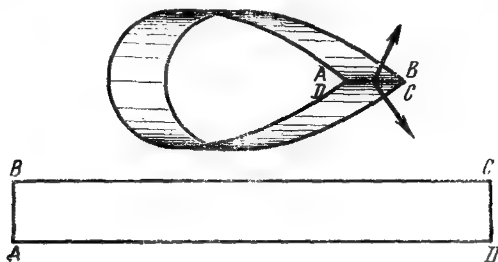


Рис. 162

Как и в случае просто гладкой поверхности, для поверхности, гладкой во внутренних точках, существуют две ориентации

$$\bar{\mathbf{v}} = \frac{\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v}{|\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v|} \quad \text{и} \quad -\mathbf{v},$$

называемые *противоположными*. Первую из них будем называть *положительной*, вторую — *отрицательной*.

Допустимыми преобразованиями координат, сохраняющими ориентацию, являются взаимно однозначные непрерывные отображения замкнутой области $\overline{D}$, непрерывно дифференцируемые и имеющие положительный якобиан внутри ее, т. е. на D.

В смысле определения 23 конус (50.27) имеет ориентацию. Действительно, если взять $D^* = \{(x, y) : 0 < x^2 + y^2 < a^2\}$, то для каждой точки $(x, y) \in D^*$ существует нормаль, непрерывная на D^*.

Обобщим понятие вершины конуса, введя понятие конической точки.

Определение 24. *Пусть* $S = \{\mathbf{r}(u, v); (u, v) \in \overline{D}\}$, $(v_0, v_0) \in D$ *и существует такая окрестность* O *точки* (u_0, v_0), *что на множестве* $O \setminus \{(u_0, v_0)\}$ *функция* $\mathbf{r}(u, v)$ *непрерывно дифференцируема, а векторное произведение* $\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v \neq \mathbf{0}$ *и ограничено по абсолютной величине.*

Если единичную нормаль (50.26) *нельзя непрерывно продолжить в точку* (u_0, v_0), *то точка* $r(u_0, v_0)$ *поверхности называется конической точкой.*

Пусть поверхность $S = \{\mathbf{r}(u, v); (u, v) \in \overline{D}\}$ имеет конечное число конических точек $r(u_i, v_i)$, $i = 1, 2, \ldots, m$, и в любой другой точке $(u, v) \in D$, $(u, v) \neq (u_i, v_i)$, $i = 1, 2, \ldots, m$, функция $\mathbf{r}(u, v)$ непрерывно дифференцируема и $\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v \neq 0$. Тогда на поверхности S нормаль (50.26) является ориентацией. Действительно, пусть

$D^* = D \setminus \bigcup_{i=1}^{m} \{(u_i, v_i)\}$. Легко видеть, что D^* — область и что $\overline{D^*} = \overline{D}$. Поэтому можно написать, что $S = \{r(u, v), (u,v) \in \overline{D^*}\}$. Таким образом, заменив D на D^*, получаем, что поверхность S гладкая во внутренних точках.

Кратко можно сказать, что *параметрически заданная поверхность, гладкая во внутренних точках, кроме, быть может, конечного числа их, имеет ориентацию.*

Если вернуться к общему определению поверхности (см. определение 9 в п. 50.1), то следует отметить, что не всегда, когда в каждой точке поверхности существует нормаль (см. определение 16), можно найти нормаль, непрерывную на всей поверхности. Примером поверхности, когда это нельзя сделать, является так называемый лист Мёбиуса; его можно получить так: взять прямоугольную полоску бумаги $ABCD$, один раз перекрутить ее вокруг оси симметрии MN, параллельной сторонам BC и AD, «склеить» ребро AB с DC, как это показано на рис. 163.

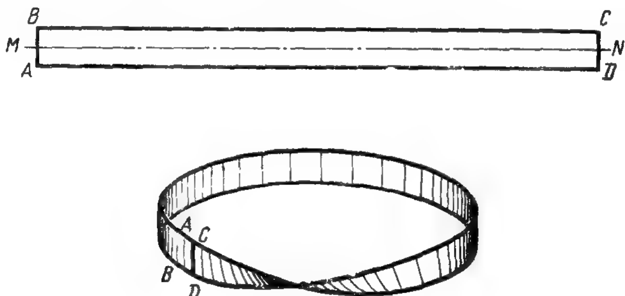


Рис. 163

Определение 25. *Гладкая поверхность S*[*] *называется ориентируемой, если на S существует непрерывная единичная нормаль. Если такой нормали не существует, то поверхность называется неориентируемой.*

Примером ориентируемой поверхности является сфера. В качестве ее ориентации можно взять, например, единичные нормали, направленные по радиусу от точки сферы к центру (см. рис. 164).

Можно показать, что всякая гладкая поверхность, являющаяся границей некоторой области G трехмерного пространства, является ориентируемой. При этом одна из ориентаций состоит из единичных нормалей, направленных от поверхности в область G (так называемые *внутренние нормали*), а другая — из единичных нормалей, направленных от поверхности наружу области G (так называемые *внешние нормали*).

*) В смысле определения 16.

Если вектор-функция $\mathbf{v}$ является ориентацией данной поверхности, то и вектор-функция $-\mathbf{v}$ также является ее ориентацией.

Упражнение 6. Доказать, что если $\mathbf{v}$ является ориентацией некоторой поверхности, то никаких других ориентаций, кроме $\mathbf{v}$ и $-\mathbf{v}$, у данной поверхности нет.

Если даны две какие-либо ориентации поверхности, то, для того чтобы узнать, совпадают они или нет, достаточно это проверить лишь в одной произвольной точке: если они в ней совпадают, то они совпадают и всюду, если же они в этой точке противоположны по знаку, то это имеет место и всюду.

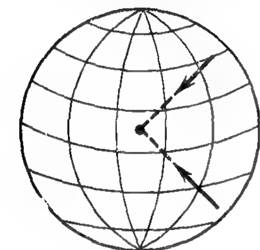


Рис. 164

Одна из двух ориентаций $\mathbf{v}$ и $-\mathbf{v}$ (произвольная) ориентируемой поверхности называется *положительной*, другая — *отрицательной*.

Иногда ориентируемые поверхности называют также *двусторонними*: они имеют две «стороны», соответствующие двум ее ориентациям. Неориентируемые поверхности называют соответственно «односторонними» (например, лист Мёбиуса имеет одну «сторону»).

Подчеркнем еще раз, что *всякая параметрически заданная поверхность, гладкая во внутренних точках всегда имеет ориентацию.*

Определение 26. *Поверхность, у которой фиксирована одна из ее ориентаций, называется ориентированной.*

Здесь под поверхностью понимается либо параметрически заданная поверхность, гладкая во внутренних точках (см. определение 22), либо ориентируемая гладкая поверхность с краем или без него (см. определение 16).

Существует и другой подход к ориентации поверхностей, основанный на другой идее.

Определение 27. *Пусть поверхность S такова, что ее можно разбить на части S_i конечным числом простых контуров γ_i, $i=1, 2, \ldots, k$ (т. е. представить S в виде $S=\bigcup\limits_{i=1}^{k} S_i$) таким образом, что*

1) каждое S_i является носителем параметрической поверхности с представлением $r_i(u, v)$, заданным на замкнутом круге K, ограниченном окружностью γ, отображающейся на γ_i;

2) каждое представление $r_i(u, v)$ взаимно однозначно отображает круг K в S;

3) два множества S_i и S_j могут иметь общие точки только принадлежащие контурам γ_i и γ_j;

4) можно так одновременно ориентировать все контуры γ_i, что всякая кривая, являющияся одновременно частью двух этих контуров, получит от них противоположную ориентацию.

В этом случае поверхность называется ориентированной.

Это определение имеет то преимущество, что может быть использовано для любой непрерывной поверхности — оно не предполагает гладкости поверхности. Можно показать, что гладкая поверхность ориентируема в смысле определения 25 тогда и только тогда, когда она ориентируема в смысле определения 27. При этом двум ориентациям поверхности в смысле определения 25 соответствуют две ориентации контуров γ_i в определении 27, согласованные между собой «по правилу штопора» (острие штопора направлено по нормали, а вращение его ручки указывает на ориентацию контура).

Из сказанного следует, что и с точки зрения определения 27 лист Мёбиуса неориентируем.

Мы не будем доказывать все эти факты, так как они не будут использоваться в дальнейшем, кроме того, это потребовало бы привлечения новых методов, относящихся не к математическому анализу, а к части математики, называемой топологией. Однако используем изложенную идею для определения ориентации так называемых кусочно-гладких поверхностей.

Введем некоторые обозначения. Пусть

$$S_i = \{\boldsymbol{r}_i(u, v), (u, v) \in \overline{D}_i\}, \; i = 1, 2, \ldots, k,$$

— гладкие во внутренних точках поверхности и пусть границы ∂D_i областей D_i являются замкнутыми контурами

$$\gamma_i = \{u_i(t), v_i(t); \; a_i \leqslant t \leqslant b_i\}.$$

Пусть $\Gamma_i = \{\boldsymbol{r}_i(u_i(t), v_i(t)); \; a_i \leqslant t \leqslant b_i\}, \; i = 1, 2, \ldots, k.$

Две поверхности S_i и S_j назовем соседними, если для контуров Γ_i и Γ_j существует по крайней мере одна кривая, являющаяся их общей частью (см. определение 5 в п. 16.1).

Мы будем предполагать, что пересечение каждых двух контуров Γ_i и Γ_j состоит из конечного числа кривых.

Определение 28. *Совокупность гладких во внутренних точках поверхностей S_i, $i = 1, 2, \ldots, k$, называется кусочно-гладкой поверхностью $S = \{S_i\}_{i=1}^{i=k}$, если для любых двух поверхностей S_i и S_j существуют такие поверхности S_{i_m}, $m = 1, 2, \ldots, m_{ij}$, что поверхность S_i—соседняя с S_{i_1}, поверхность S_{i_m}—соседняя с $S_{i_{m+1}}$, $m = 1, 2, \ldots, m_{ij}-1$, а поверхность $S_{m_{i,j}}$ — соседняя с S_j.*

Совокупность всех частей контуров Γ_i, каждая из которых принадлежит только одному контуру Γ_i, называется краем ∂S кусочно-гладкой поверхности S.

Определение 29. *Кусочно-гладкая поверхность $S = \{S_i\}_{i=1}^{i=k}$ называется ориентируемой, если существует такая ориентация*

контуров Γ_i, $i = 1, 2, \ldots, k$ (*называемая согласованной*), *что части этих контуров, принадлежащие двум различным контурам* Γ_i *и* Γ_j *соседних поверхностей, получают от контуров* Γ_i *и* Γ_j *противоположную ориентацию* (рис. 165).

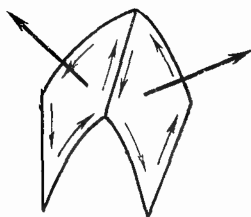


Рис. 165

Если ориентация поверхностей S_i (т. е. соответствующие непрерывные единичные нормали) выбраны таким образом, что они согласуются с указанными ориентациями контуров Γ_i «по правилу штопора» (см. рис. 165), то мы будем говорить, что поверхности S_i ориентированы согласованно. В этом случае совокупность ориентированных контуров Γ_i и ориентаций поверхностей S_i, $i = 1, 2, \ldots, k_0$, называется *ориентацией поверхности* S.

Как и в случае гладких поверхностей, можно показать, что если кусочно-гладкая поверхность ориентируема, то она имеет в точности две ориентации. В этом случае, однако, уже нельзя ввести понятие положительной ориентации, используя заданные представления гладких кусков поверхности и беря на них единичные нормали $\frac{\boldsymbol{r}_u \times \boldsymbol{r}_v}{|\boldsymbol{r}_u \times \boldsymbol{r}_v|}$, так как эти ориентации могут оказаться несогласованными. Поэтому в случае кусочно-гладких поверхностей следует всегда конкретно оговаривать, что подразумевается под ориентированными поверхностями S^+ и S^- ориентируемой поверхности S.

Пусть $S = \{S_i\}_{i=1}^{i=k}$ — ориентируемая кусочно-гладкая поверхность. Выберем какие-либо согласованные ориентации поверхностей S_i и ориентированные таким образом поверхности S_i обозначим через S_i^+, а ориентированные противоположно — через S_i^-. Ориентации поверхностей S_i^- также являются согласованными.

Поверхность S, на которой фиксирована ориентация (такие поверхности называются ориентированными), соответствующая ориентированным поверхностям S_i^+, обозначается $S^+ = \{S_i^+\}_{i=1}^{i=k}$. Аналогично $S^- = \{S_i^-\}_{i=1}^{i=k}$.

Если же для данной кусочно-гладкой поверхности S не существует разбиения $S = \{S_i\}_{i=1}^{i=k}$ на гладкие согласованно ориентируемые поверхности S_i, то она называется *неориентируемой*.

Следует заметить, что если гладкая поверхность ориентируема или неориентируема в смысле определения 29, то она будет ориентируема (соответственно неориентируема) и в смысле первоначального определения ориентации. Как и раньше в подобных случаях, мы не будем останавливаться на доказательстве этого утверждения, а также и на математизации понятия «правила штопора», так как это

потребовало бы изложения некоторых топологических методов исследования, что не входит в задачу настоящего учебника. Эти понятия и свойства, по существу, не используются в нижеследующих теоремах, так как в каждом случае, о котором будет идти речь, можно будет конкретно указать, о каком именно выборе ориентации идет речь.

§ 51. ПОВЕРХНОСТНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

В этом и в следующем параграфах будут рассматриваться только параметрически заданные поверхности (см. определение 1 в 50.1) и кусочно-гладкие поверхности, состоящие из конечного числа параметрически заданных поверхностей (см. определение 28 в п. 50.6). Поэтому в этих параграфах для простоты параметрически заданные поверхности называются просто **поверхностями**.

51.1. Определение и свойства поверхностных интегралов

Пусть задана гладкая поверхность S,

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(u, v) = \{x = x(u, v),\ y = y(u, v),\ z = z(u, v);\ (u, v) \in \overline{D}\} \quad (51.1)$$

— ее непрерывно дифференцируемое представление без особых точек, D — квадрируемая плоская область и, как обычно, E, G и F — коэффициенты первой квадратичной формы поверхности S. Пусть, далее, на множестве точек $r(u, v)$ поверхности S задана функция Φ, т. е. функция $\Phi(r(u, v)) = \Phi(x(u, v),\ y(u, v),\ z(u, v))$. Иногда функцию Φ будем условно обозначать также $\Phi(x, y, z)$ (ср. п. 47.1).

Определение 1. *Интеграл* $\iint\limits_S \Phi(x, y, z)\,dS$ *определим равенством (см. 50.24)*

$$\iint\limits_S \Phi(x, y, z)\,dS = \iint\limits_D \Phi(x(u, v),\ y(u, v),\ z(u, v))\sqrt{EG - F^2}\,du\,dv. \quad (51.2)$$

Этот интеграл называется *поверхностным интегралом первого рода.*

Пусть $\rho = \rho(u_1, v_1)$ — другое представление рассматриваемой поверхности, которое задано на замыкании $\overline{D}_1$ квадрируемой области D_1 и для которого преобразование (50.4) параметров u, v в u_1, v_1 взаимно однозначно и непрерывно дифференцируемо на $\overline{D}$ и имеет на $\overline{D}$ не равный нулю якобиан. Если E_1, F_1 и G_1 суть

коэффициенты первой квадратичной формы, соответствующие этому представлению, то

$$\iint_D \Phi(x(u, v), y(u, v), z(u, v)) \sqrt{EG-F^2}\, du\, dv =$$

$$= \iint_{D_1} \Phi(x(u_1, v_1), y(u_1, v_1), z(u_1, v_1)) \sqrt{E_1 G_1 - F_1^2}\, du_1\, dv_1. \qquad (51.3)$$

Чтобы в этом убедиться, достаточно в интеграле, стоящем в правой части этого равенства, сделать замену переменных (50.4) и воспользоваться формулой (50.18). Таким образом, поверхностный интеграл первого рода не зависит от выбора представлений поверхности.

Пусть, теперь $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$ и $\boldsymbol{k}$ — как обычно, единичные координатные векторы,

$$\boldsymbol{n} = \boldsymbol{r}_u \times \boldsymbol{r}_v = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \end{vmatrix} = \frac{\partial(y, z)}{\partial(u, v)} \boldsymbol{i} + \frac{\partial(z, x)}{\partial(u, v)} \boldsymbol{j} + \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \boldsymbol{k} \qquad (51.4)$$

и

$$\boldsymbol{\nu} = \frac{\boldsymbol{n}}{|\boldsymbol{n}|}, \qquad (51.5)$$

причем, согласно нашим предположениям, нормаль $\boldsymbol{\nu}$ непрерывно продолжаема на границу области D.

Поверхность S, на которой выбрана единичная нормаль $\boldsymbol{\nu}$, обозначим S^+, а поверхность S, на которой выбрана нормаль $-\boldsymbol{\nu}$, обозначим через S^- (очевидно, $\boldsymbol{\nu}$ и $-\boldsymbol{\nu}$ суть две ориентации поверхности S). Подчеркнем, что поверхности с нормалями определяются самой поверхностью «с точностью до наоборот» и зависят от выбора представления поверхности.

Определение 2. *Поверхностные интегралы*

$$\iint_{S^+} \Phi(x, y, z)\, dx\, dy \quad и \quad \iint_{S^-} \Phi(x, y, z)\, dx\, dy, \qquad (51.6)$$

называемые поверхностными интегралами второго рода (при заданном представлении поверхности), определяются согласно формулам

$$\left.\begin{aligned} \iint_{S^+} \Phi(x, y, z)\, dx\, dy &= \iint_S \Phi(x, y, z) \cos(\widehat{\boldsymbol{\nu}, \boldsymbol{k}})\, dS, \\ \iint_{S^-} \Phi(x, y, z)\, dx\, dy &= \iint_S \Phi(x, y, z) \cos(\widehat{-\boldsymbol{\nu}, \boldsymbol{k}})\, dS, \end{aligned}\right\} \qquad (51.7)$$

где $(\widehat{\mathbf{v}, \boldsymbol{k}})$ и $(-\widehat{\mathbf{v}, \boldsymbol{k}})$ — углы между векторами $\mathbf{v}$, $\boldsymbol{k}$ и, соответственно, между $-\mathbf{v}, \boldsymbol{k}$.

За основу этого определения взято интуитивное соображение о том, что элемент площади dS данной поверхности (см. (50.24)), помноженный на косинус угла, который он «составляет» с плоскостью xOy, равен элементу площади $dx\,dy$ этой плоскости (рис. 166), как было бы, если бы речь шла о площади плоской фигуры и ее проекции.

Интегралы (51.6) будем обозначать общим символом

$$\iint\limits_{S} \Phi(x, y, z)\,dx\,dy. \tag{51.8}$$

Так как $(\widehat{\mathbf{v}, \boldsymbol{k}}) + (-\widehat{\mathbf{v}, \boldsymbol{k}}) = \pi$ и, следовательно, $\cos(\mathbf{v}, \boldsymbol{k}) = -\cos(-\widehat{\mathbf{v}, \boldsymbol{k}})$, то из (51.7) получим

$$\iint\limits_{S^+} \Phi(x, y, z)\,dx\,dy = -\iint\limits_{S^-} \Phi(x, y, z)\,dx\,dy. \tag{51.9}$$

Поверхностные интегралы первого рода не зависят от выбора представления поверхности, поэтому поверхностные интегралы второго рода (51.6) не зависят от выбора представления ориентированной поверхности, но, конечно, (51.8) при данной поверхности S и данной функции Φ зависят, вообще говоря, от выбора непрерывной нормали $\mathbf{v}$ на поверхности, т. е. от выбора ориентации поверхности.

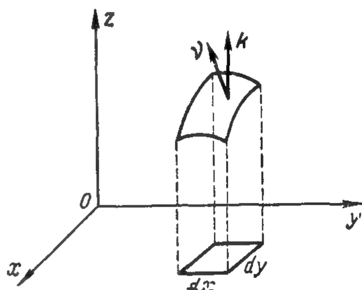


Рис. 166

Выведем формулы, удобные для вычисления поверхностных интегралов второго рода. Предварительно заметим, что из формул (51.4), (51.5) и (50.22) следует, что

$$\cos(\widehat{\mathbf{v}, \boldsymbol{k}}) = \mathbf{v}\boldsymbol{k} = \frac{\boldsymbol{n}\boldsymbol{k}}{|\boldsymbol{n}|} = \frac{(\boldsymbol{r}_u \times \boldsymbol{r}_v)\boldsymbol{k}}{|\boldsymbol{r}_u \times \boldsymbol{r}_v|} = \frac{\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}}{|\boldsymbol{r}_u \times \boldsymbol{r}_v|} = \frac{\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}}{\sqrt{EG - F^2}},$$

поэтому

$$\iint\limits_{S^+} \Phi(x, y, z)\,dx\,dy = \iint\limits_{S} \Phi(x, y, z)\cos(\widehat{\mathbf{v}\boldsymbol{k}})\,dS =$$

$$= \iint_D \Phi[x(u, v), y(u, v), z(u,v)] \cos(\widehat{\mathbf{v}\mathbf{k}}) \sqrt{EG - F^2}\, du\, dv =$$

$$= \iint_D \Phi[x(u, v), y(u, v), z(u, v)] \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}\, du\, dv.$$

Таким образом, опуская у функций обозначения аргументов, имеем

$$\iint_{S^+} \Phi\, dx\, dy = \iint_D \Phi \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}\, du\, dv \qquad (51.10)$$

и, согласно (51.8),

$$\iint_{S^-} \Phi\, dx\, dy = -\iint_D \Phi \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}\, du\, dv = \iint_D \Phi \frac{\partial(y, x)}{\partial(u, v)}\, du\, dv. \qquad (51.11)$$

Иногда интеграл $\iint_{S^+} \Phi\, dx\, dy$ обозначается $\iint_S \Phi\, dx\, dy$, а интеграл $\iint_{S^-} \Phi\, dx\, dy$ записывается в этом случае в виде $\iint_S \Phi\, dy\, dx$.

Таким образом,

$$\iint_S \Phi\, dx\, dy = \iint_D \Phi \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}\, du\, dv, \quad \iint_S \Phi\, dy\, dx = \iint_D \Phi \frac{\partial(y, x)}{\partial(u, v)}\, du\, dv.$$

Если поверхность S задана явно непрерывно дифференцируемой функцией $z = f(x, y)$, $(x, y) \in \overline{D}$, то формула (51.3) принимает вид [см. (50.25)]

$$\iint_S \Phi(x, y, z)\, dS = \iint_D \Phi(x, y, f(x, y)) \sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}\, dx\, dy,$$

а формулы (51.10) и (51.11)—такой вид:

$$\iint_{S^+} \Phi(x, y, z)\, dx\, dy = \iint_G \Phi(x, y, f(x, y))\, dx\, dy,$$

$$\iint_{S^-} \Phi(x, y, z)\, dx\, dy = -\iint_G \Phi(x, y, f(x, y))\, dx\, dy.$$

Здесь S^+ называется «верхней стороной поверхности S» (она соответствует положительной ориентации $\mathbf{v}$ поверхности S при заданном ее представлении $z = f(x, y)$), а S^- называется «нижней стороной поверхности S» (она соответствует отрицательной ориентации $-\mathbf{v}$).

Эти названия объясняются тем обстоятельством, что в случае явного задания поверхности

$$\boldsymbol{n} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 1 & 0 & f_x \\ 0 & 1 & f_y \end{vmatrix} = -f_x\boldsymbol{i} - f_y\boldsymbol{j} + \boldsymbol{k},$$

и, следовательно,

$$\boldsymbol{\nu} = \left(-\frac{f_x}{\sqrt{1+f_x^2+f_y^2}},\ -\frac{f_y}{\sqrt{1+f_x^2+f_y^2}},\ \frac{1}{\sqrt{1+f_x^2+f_y^2}}\right),$$

поэтому

$$\cos\left(\widehat{\boldsymbol{\nu}, \boldsymbol{k}}\right) = \frac{1}{\sqrt{1+f_x^2+f_y^2}} > 0.$$

Отсюда видно, что угол между векторами $\boldsymbol{\nu}$ и $\boldsymbol{k}$ острый, т. е. вектор $\boldsymbol{\nu}$ направлен «вверх» от рассматриваемой поверхности (см. рис. 166).

Подобно определению (51.7) определяются и другие поверхностные интегралы второго рода:

$$\left.\begin{aligned} \iint_{S^+} \Phi(x, y, z)\,dy\,dz &= \iint_S \Phi(x, y, z)\cos\left(\widehat{\boldsymbol{\nu}, \boldsymbol{i}}\right) dS, \\ \iint_{S^-} \Phi(x, y, z)\,dy\,dz &= \iint_S \Phi(x, y, z)\cos\left(\widehat{-\boldsymbol{\nu}, \boldsymbol{i}}\right) dS, \\ \iint_{S^+} \Phi(x, y, z)\,dz\,dx &= \iint_S \Phi(x, y, z)\cos\left(\widehat{\boldsymbol{\nu}, \boldsymbol{j}}\right) dS, \\ \iint_{S^-} \Phi(x, y, z)\,dz\,dx &= \iint_S \Phi(x, y, z)\cos\left(\widehat{-\boldsymbol{\nu}, \boldsymbol{j}}\right) dS. \end{aligned}\right\} \quad (51.12)$$

Для этих интегралов аналогично проделанному выше получаем

$$\left.\begin{aligned} \iint_{S^-} \Phi\,dy\,dz &= -\iint_{S^+} \Phi\,dy\,dz, \\ \iint_{S^-} \Phi\,dz\,dx &= -\iint_{S^+} F\,dz\,dx, \\ \iint_{S^+} \Phi\,dy\,dz &= \iint_D \Phi\,\frac{\partial(y, z)}{\partial(u, v)}\,du\,dv, \\ \iint_{S^+} \Phi\,dz\,dx &= \iint_D \Phi\,\frac{\partial(z, x)}{\partial(u, v)}\,du\,dv. \end{aligned}\right\} \quad (51.13)$$

51.2. Поверхностные интегралы как пределы интегральных сумм

Поверхностные интегралы могут быть получены также и как пределы соответствующих интегральных сумм. Для этого возьмем какое-либо разбиение $\tau = \{D_i\}_{i=1}^{i=i_0}$ области D, на замыкании $\overline{D}$ которой задано представление $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(u, v)$, $(u, v) \in \overline{D}$, рассматриваемой гладкой поверхности S. Обозначим через S_i поверхность, задаваемую представлением $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(u, v)$, $(u, v) \in \overline{D}_i$. Очевидно, что S_i — также гладкие поверхности $i = 1, 2, \ldots, i_0$. (Система $\tau_S = \{S_i\}_{i=1}^{i=i_0}$, называется разбиением поверхности S.) Пусть функция $\Phi(r(u, v)) = \Phi(x(u, v),\ y(u, v),\ z(u, v))$ непрерывна на $\overline{D}$ и $(u_i, v_i) \in \overline{D}_i$, $\Phi_i = \Phi(r(u_i, v_i))$. Обозначим через $\cos_i(\widehat{\boldsymbol{\nu}, \boldsymbol{k}})$ косинус угла между нормалью $\boldsymbol{\nu}$ и ортом $\boldsymbol{k}$ в точке $r(u_i, v_i)$ данной поверхности и положим

$$\sigma_\tau^{(1)} = \sum_{i=1}^{i_0} \Phi_i \operatorname{mes} S_i, \quad \sigma_\tau^{(2)} = \sum_{i=1}^{i_0} \Phi_i \cos_i(\widehat{\boldsymbol{\nu}, \boldsymbol{k}}) \operatorname{mes} S_i;$$

тогда

$$\lim_{\delta_\tau \to 0} \sigma_\tau^{(1)} = \iint_S \Phi(x, y, z)\, dS, \tag{51.14}$$

$$\lim_{\delta_\tau \to 0} \sigma_\tau^{(2)} = \iint_S \Phi(x, y, z)\, dx\, dy. \tag{51.15}$$

Действительно,

$$\iint_S \Phi(x, y, z)\, dS = \iint_D \Phi(r(u, v)) \sqrt{EG - F^2}\, du\, dv = \\ = \sum_{i=1}^{i_0} \iint_{D_i} \Phi(r(u, v)) \sqrt{EG - F^2}\, du\, dv;$$

поскольку $\operatorname{mes} S_i = \iint\limits_{D_i} \sqrt{EG - F^2}\, du\, dv$, то

$$\sigma_\tau^{(1)} = \sum_{i=1}^{i_0} \Phi_i \iint_{D_i} \sqrt{EG - F^2}\, du\, dv = \\ = \sum_{i=1}^{i_0} \iint_{D_i} \Phi(r(u_i, v_i)) \sqrt{EG - F^2}\, du\, dv.$$

Обозначая теперь через $\omega(\delta; \Phi)$ модуль непрерывности функции Φ на замкнутой области $\overline{D}$, получим

$$\left| \iint_S \Phi(x, y, z)\, dS - \sigma_\tau^{(1)} \right| \leqslant \sum_{i=1}^{i_0} \iint_{D_i} |\Phi(r(u, v)) -$$

$$-\Phi\left(r(u_i, v_i)\right)\Big|\sqrt{EG-F^2}\,du\,dv \leqslant \omega(\delta_\tau; \Phi)\operatorname{mes} S.$$

Переходя в этом неравенстве к пределу при $\delta_\tau \to 0$ и замечая, что $\lim\limits_{\delta_\tau \to 0} \omega(\delta_\tau; \Phi) = 0$, получим формулу (51.14).

Аналогично доказывается формула (51.15) (произведение $\Phi \cos(\widehat{\mathbf{v}, \mathbf{k}})$ непрерывно, а значит, и равномерно непрерывно на $\overline{D}$). Подобные утверждения справедливы и для интегралов второго рода других типов (51.12).

Упражнение 1. Доказать формулу (51.15).

51.3. Поверхностные интегралы по поверхностям с коническими точками и по кусочно-гладким поверхностям

Легко обобщаются определения поверхностных интегралов и на гладкие поверхности, имеющие конечное число конических точек.

Пусть для простоты поверхность S гладкая, кроме одной конической точки $M_0 = r(u_0, v_0)$, $(u_0, v_0) \in D$. Это означает, что существует векторное представление $\boldsymbol{r}(u, v)$, $(u, v) \in \overline{D}$, поверхности S, такое, что для всех $(u, v) \in \overline{D}$, $(u, v) \neq (u_0, v_0)$, функция $\boldsymbol{r}(u, v)$ непрерывно дифференцируема; $\boldsymbol{r}_u \times \boldsymbol{r}_v \neq \boldsymbol{0}$ и ограничено по абсолютной величине.

Пусть $\varepsilon > 0$, $K_\varepsilon = \{(u, v) : (u - u_0)^2 - (v - v_0)^2 < \varepsilon^2\}$ — круг радиуса ε, и S_ε — поверхность, задаваемая представлением $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(u, v)$ при $(u, v) \in \overline{D} \setminus K_\varepsilon$ *). Поверхность S_ε, очевидно, является гладкой дифференцируемой поверхностью.

Определение 3. *Если существует предел*

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \iint\limits_{S_\varepsilon} F(x, y, z)\,dS,$$

то он называется поверхностным интегралом $\iint\limits_S \Phi(x, y, z)\,dS$.

Аналогично определяются в этом случае и поверхностные интегралы второго рода.

Упражнение 2. Пусть S — гладкая поверхность с конечным числом конических точек. Доказать, что для непрерывной функции Φ, определенной на носителе поверхности S, существуют интегралы

$$\iint\limits_S \Phi\,dS, \quad \iint\limits_S \Phi\,dx\,dy, \quad \iint\limits_S \Phi\,dy\,dz, \quad \iint\limits_S \Phi\,dz\,dx.$$

---

*) При достаточно малых $\varepsilon > 0$ множество $\overline{D} \setminus K_\varepsilon$ является замкнутой областью.

Определим поверхностные интегралы по кусочно-гладким поверхностям.

Определение 4. *Пусть* $S=\{S_i\}$, $i=1, 2, \ldots, k$ — *кусочно-гладкая поверхность (см. определение 28 в п. 50.6) и* $\Phi(x, y, z)$ — *функция, определенная на множестве точек поверхности* S, *тогда по определению*

$$\iint\limits_S \Phi\, dS = \sum_{i=1}^{k} \iint\limits_{S_i} \Phi\, dS_i. \tag{51.16}$$

Определение 5. *Если кусочно-гладкая поверхность* $S=\{S_i\}$, $i=1, 2, \ldots, k$, *ориентируема и* $S=\{S_i^+\}$ — *одна из соответствующих ей ориентированных поверхностей (обозначения см. в п. 50.6), то по определению*

$$\iint\limits_{S^+} \Phi\, dx\, dy = \sum_{i=1}^{k} \iint\limits_{S_i^+} \Phi\, dx\, dy, \quad \iint\limits_{S^+} \Phi dy\, dz = \sum_{i=1}^{i_0} \iint\limits_{S_i^+} \Phi\, dy\, dz,$$

$$\iint\limits_{S^+} \Phi dz\, dx = \sum_{i=1}^{k} \iint\limits_{S_i^+} \Phi\, dz\, dx. \tag{51.17}$$

Аналогично в рассматриваемом случае определяются и интегралы по поверхности $S^- = \{S_i^-\}$.

Мы остановились только на тех свойствах поверхностных интегралов, которые связаны со спецификой их определения, с поверхностью, по которой, как говорят, производится интегрирование. Естественно, что, поскольку они сводятся к обычным кратным интегралам, на них переносятся и различные их свойства (линейность, интегральная теорема о среднем и т. п.).

З а м е ч а н и е. Условия на отображения, осуществляющие допустимые преобразования параметров для гладких поверхностей, сформулированные нами выше (см. п. 50.1), часто оказываются слишком жесткими (ср. с подобным обстоятельством для кривых в 47.2). Например, при таком подходе представления части шара единичного радиуса с центром в начале координат, лежащей в первом октанте:

$$z = \sqrt{1-x^2+y^2}, \quad \text{где} \quad x^2+y^2 \leqslant 1, \quad x \geqslant 0, \quad y \geqslant 0$$

и

$$x = r\cos\psi\cos\varphi, \quad y = r\cos\psi\sin\varphi, \quad z = r\sin\varphi,$$

где $0 \leqslant \varphi \leqslant \frac{\pi}{2}, \quad 0 \leqslant \psi \leqslant \frac{\pi}{2}$,

не эквивалентны. Более того, первое представление не определяет в указанном смысле непрерывно дифференцируемую поверхность. Поэтому естественно расширить определение непрерывно дифференцируемой поверхности. Сделаем это следующим образом.

Рассмотрим совокупность представлений $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(u, v)$, $(u, v) \in \overline{D}$, непрерывных на $\overline{D}$ и непрерывно дифференцируемых на D. Допустимыми преобразованиями параметров $u = \varphi(u_1, v_1)$, $v = \psi(u_1, v_1)$, $(u_1, v_1) \in \overline{D}_1$, будем называть всякое взаимно однозначное непрерывное отображение замыкания $\overline{D}_1$ плоской области D_1 на $\overline{D}$, непрерывно дифференцируемое и имеющее не равный нулю якобиан в D. Как всегда, два представления называются эквивалентными, если можно перейти от одного к другому с помощью допустимого преобразования параметра.

Мы скажем, что класс эквивалентных представлений указанного типа задает непрерывно дифференцируемую поверхность, если в этом классе существует по крайней мере одно представление $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(u, v)$, $(u, v) \in \overline{D}$, непрерывно дифференцируемое вплоть до границы области D.

Непрерывно дифференцируемая поверхность называется гладкой поверхностью, если $\boldsymbol{r}_u \times \boldsymbol{r}_v \neq \boldsymbol{0}$ в $\overline{D}$ при некотором ее представлении $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(u, v)$, $(u, v) \in \overline{D}$.

Площадь непрерывно дифференцируемой поверхности с представлением $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(u, v)$, $(u, v) \in \overline{D}$ определяется как значение интеграла

$$\iint_D |\boldsymbol{r}_u \times \boldsymbol{r}_v| \, du \, dv,$$

который, быть может, является и несобственным. Чтобы убедиться в его существовании, достаточно сделать замену переменного с помощью допустимого преобразования, переводящего данное представление в представление, непрерывно дифференцируемое вплоть до границы области.

Аналогичным образом ослабляются требования на допустимые преобразования параметра и в случае ориентированных поверхностей.

При таких определениях остаются в силе все выше данные определения поверхностных интегралов и их свойства, естественно при учете того, что в этом случае при некоторых представлениях поверхностей мы можем получить несобственные интегралы. Остаются справедливыми и теоремы, доказываемые в следующем параграфе о поверхностных интегралах, но мы не будем на этом специально останавливаться.

Упражнение 3. Пусть S — гладкая поверхность (в новом расширенном смысле) и Φ — функция, непрерывная на S. Доказать, что существуют интегралы

$$\int_S \Phi(x, y, z)\,dx\,dy, \quad \int_S \Phi(x, y, z)\,dz\,dx, \quad \int_S \Phi(x, y, z)\,dy\,dz.$$

§ 52. СКАЛЯРНЫЕ И ВЕКТОРНЫЕ ПОЛЯ

52.1. Определения

Вместо терминов «числовая функция точки», «вектор-функция точки» употребляются равнозначные: *скалярное поле, векторное поле*. Эта терминология подчеркивает, что значения рассматриваемых функций зависят именно от точек пространства (в которых эти функции определены), а не от их координат, при выборе той или иной системы координат.

Употребляя эту терминологию, можно сказать, например, что всякое скалярное поле $u = u(M)$, определенное и дифференцируемое в некоторой области G, порождает векторное поле его градиентов (см. п. 20.6 и п. 50.2):

$$\boldsymbol{a}(M) = \operatorname{grad} u.$$

Определение 1. *Пусть в области G*) задано векторное поле $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}(M)$ и существует определенная в G функция $u = u(M)$ такая, что*

$$\boldsymbol{a}(M) = \operatorname{grad} u(M).$$

*Тогда функция $u(M)$ называется потенциальной функцией, или потенциалом данного векторного поля**).*

Пусть, например $\boldsymbol{E}(M)$ — напряженность электрического поля, созданного единичным отрицательным зарядом, помещенным в начале координат. Тогда в точке $M(x, y)$ вектор $\boldsymbol{E}(M)$ имеет, как это известно из физики, длину $\frac{1}{r^2}$, где $r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$, и направлен от точки M к началу координат. Отсюда получается, что

$$\boldsymbol{E}(M) = \left(-\frac{x}{r^3},\ -\frac{y}{r^3},\ -\frac{z}{r^3}\right).$$

---

*) В этом параграфе для простоты рассматриваются только плоские или трехмерные области G.

**) Иногда в приложениях потенциал u определяется формулой $\boldsymbol{a} = -\operatorname{grad} u$.

Электрический потенциал рассматриваемого поля, т. е. функция $u(M)=\frac{1}{r}$, является и потенциалом, ибо

$$\operatorname{grad} u(M)=\boldsymbol{E}(M).$$

Рассмотрим снова векторное поле $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}(M)$, определенное в некоторой области G. Зафиксируем систему координат. Вектор-функцию $\boldsymbol{a}(M)$ можно рассматривать как функцию трех переменных — координат x, y, z точки M: $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}(x, y, z)$.

Пусть $M_0=(x_0, y_0, z_0)\in G$, и задан единичный вектор $\boldsymbol{e}=(\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$. Проведем через точку M_0 прямую в направлении $\boldsymbol{e}$:

$$x=x_0+t\cos\alpha, \quad y=y_0+t\cos\beta, \quad z=z_0+t\cos\gamma.$$

***Определение* 2.** *Производная вектор-функции* $\boldsymbol{a}(x_0+t\cos\alpha,\ y_0+t\cos\beta,\ z_0+t\cos\gamma)$ *по* t *при* $t=0$ *(если она существует) называется производной по направлению* $\boldsymbol{e}$ *в точке* M_0 *вектор-функции* $\boldsymbol{a}(M)$ *и обозначается* $\frac{\partial \boldsymbol{a}}{\partial \boldsymbol{e}}(M_0)$:

$$\frac{\partial \boldsymbol{a}\ (M_0)}{\partial \boldsymbol{e}}=\frac{d}{dt}\boldsymbol{a}(x_0+t\cos\alpha,\ y_0+t\cos\beta,\ z_0+t\cos\gamma)\Big|_{t=0}.$$

По правилу дифференцирования сложной функции, опуская для простоты обозначения аргумента, получаем

$$\frac{\partial \boldsymbol{a}}{\partial \boldsymbol{e}}=\frac{\partial \boldsymbol{a}}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial \boldsymbol{a}}{\partial y}\cos\beta+\frac{\partial \boldsymbol{a}}{\partial z}\cos\gamma. \tag{52.1}$$

Вводя символ $\nabla=\boldsymbol{i}\frac{\partial}{\partial x}+\boldsymbol{j}\frac{\partial}{\partial y}+\boldsymbol{k}\frac{\partial}{\partial z}$ (см. п. 20.6) и полагая

$$e\nabla=\cos\alpha\frac{\partial}{\partial x}+\cos\beta\frac{\partial}{\partial y}+\cos\gamma\frac{\partial}{\partial z}.$$

Перепишем формулу (52.1) в виде

$$\frac{\partial \boldsymbol{a}}{\partial \boldsymbol{e}}=(\boldsymbol{e}\nabla)\boldsymbol{a}.$$

***Определение* 3.** *Если* $\boldsymbol{b}=(b_x, b_y, b_z)$*—произвольный (не обязательно единичный) фиксированный вектор, то вектор*

$$(\boldsymbol{b}\nabla)\boldsymbol{a}=b_x\frac{\partial \boldsymbol{a}}{\partial x}+b_y\frac{\partial \boldsymbol{a}}{\partial y}+b_z\frac{\partial \boldsymbol{a}}{\partial z}$$

называется градиентом вектора $\boldsymbol{a}$ *по вектору* $\boldsymbol{b}$.

Если $\boldsymbol{b}=b\boldsymbol{b}_0$, где $|\boldsymbol{b}_0|=1$, то «формальными преобразованиями» получим

$$(\boldsymbol{b}\nabla)\boldsymbol{a}=(b\boldsymbol{b}_0\nabla)\boldsymbol{a}=b(\boldsymbol{b}_0\nabla)\boldsymbol{a}=b\frac{\partial \boldsymbol{a}}{\partial \boldsymbol{b}_0}.$$

Переходя к координатной записи, легко непосредственно убедиться в справедливости полученной формулы, показать, что с символом ∇ можно обращаться при вычислениях, как с настоящим вектором, не забывая, конечно, при этом, что, кроме этого, символ ∇ означает также и определенную операцию дифференцирования. Мы не будем здесь останавливаться на обосновании правомочности таких «формальных преобразований с символом ∇». Любая формула, полученная подобным образом, может быть, конечно, получена и без применения символа ∇ обычными обоснованными рассуждениями в координатах. Следует иметь в виду, однако, что применение символа ∇ часто весьма существенно сокращает выкладки.

Вернемся снова к исходному векторному полю $\boldsymbol{a} = (a_x, a_y, a_z)$ в области G.

Определение 4. *Пусть поле $\boldsymbol{a} = (a_x, a_y, a_z)$ дифференцируемо в некоторой точке. Число $\frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z}$ называется дивергенцией поля в данной точке и обозначается* $\operatorname{div} \boldsymbol{a}$, *т. е.*

$$\operatorname{div} \boldsymbol{a} = \frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z}. \tag{52.2}$$

Символически $\operatorname{div} \boldsymbol{a}$ может быть записана как скалярное произведение символа ∇ и вектора $\boldsymbol{a}$:

$$\operatorname{div} \boldsymbol{a} = \nabla \boldsymbol{a}.$$

Определение 5. *Вектор с координатами*

$$\frac{\partial a_z}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial z}, \quad \frac{\partial a_x}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial x}, \quad \frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y}, \tag{52.3}$$

называется вихрем, или ротором, векторного поля $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}(M)$ и обозначается $\operatorname{rot} \boldsymbol{a}$.

Символически

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{a} = \nabla \times \boldsymbol{a} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ a_x & a_y & a_z \end{vmatrix}. \tag{52.4}$$

Геометрический и физический смысл $\operatorname{div} \boldsymbol{a}$ и $\operatorname{rot} \boldsymbol{a}$ будет выяснен в дальнейшем.

Приведем пример формальных преобразований с символом ∇. Если за символом ∇ следует несколько членов, на один из которых он действует как оператор дифференцирования, а на другие нет, то для ясности будем обозначать этот член вертикальной стрелкой. Поясним это на примере.

Пусть f — скалярное, $\boldsymbol{a}$ — векторное поле, тогда

$$\operatorname{rot} f\boldsymbol{a} = \nabla \times f\boldsymbol{a} = \nabla \times f\overset{\downarrow}{\boldsymbol{a}} + \nabla \times \overset{\downarrow}{f}\boldsymbol{a} =$$
$$= f(\nabla \times \boldsymbol{a}) + (\nabla f \times \boldsymbol{a}) = f \operatorname{rot} \boldsymbol{a} + \operatorname{grad} f \times \boldsymbol{a}.$$

Введем еще некоторые определения, связанные с векторным полем $\boldsymbol{a} = (a_x, a_y, a_z)$ в области G.

Определение 6. *Пусть γ — замкнутая кусочно-гладкая кривая в области G. Интеграл*

$$\int_\gamma a_x\,dx + a_y\,dy + a_z\,dz$$

называется циркуляцией векторного поля $\boldsymbol{a} = (a_x, a_y, a_z)$ по кривой γ и обозначается $\int \boldsymbol{a}\,d\boldsymbol{r}$, где $d\boldsymbol{r} = (dx, dy, dz)$.

Если γ — гладкая кривая, $\boldsymbol{t} = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$ — единичный касательный вектор, s — переменная длина дуги, а $\text{пр}_{\boldsymbol{t}}\boldsymbol{a}$ — величина проекции вектора $\boldsymbol{a}$ на касательную, то

$$\int_\gamma \boldsymbol{a}\,d\boldsymbol{r} = \int_\gamma \text{пр}_{\boldsymbol{t}}\boldsymbol{a}\,ds.$$

Действительно,

$$\int_\gamma a\,d\boldsymbol{r} = \int_\gamma \boldsymbol{a}_x\,dx + a_y\,dy + a_z\,dz =$$
$$= \int_\gamma (\boldsymbol{a}_x\cos\alpha + \boldsymbol{a}_y\cos\beta + \boldsymbol{a}_z\cos\gamma)\,ds = \int_\gamma (\boldsymbol{a}\boldsymbol{t})\,ds = \int_\gamma \text{пр}_{\boldsymbol{t}}\boldsymbol{a}\,ds.$$

Определение 7. *Поле, циркуляция которого по любой замкнутой кусочно-гладкой кривой, лежащей в области G, равна нулю, называется потенциальным.*

Рассмотрим в качестве примера плоское векторное поле, т. е. поле $\boldsymbol{a} = (P, Q)$, заданное на плоской области G: $P = P(x, y)$, $Q = Q(x, y)$. Вихрь этого поля имеет вид

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{a} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & 0 \end{vmatrix} = \boldsymbol{k}\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right).$$

Теорема 4 п. 47.8 во вновь введенных терминах может быть перефразирована следующим образом. *Для односвязной области G по-*

тенциальность поля, существование потенциальной функции и условие, что вихрь поля во всех точках равен нулю, эквивалентны.

Определение 8. *Пусть S — некоторая ориентированная поверхность, лежащая в области G, $\boldsymbol{\nu}$ — единичная нормаль на поверхности, задающая ее ориентацию, и S^+ — поверхность S с указанной ориентацией. Интеграл*

$$\iint\limits_{S^+} \boldsymbol{a\nu}\, dS$$

называется потоком векторного поля через поверхность S и обозначается $\iint \boldsymbol{a}\, d\boldsymbol{S}$, где $d\boldsymbol{S} = \boldsymbol{\nu}\, dS$ $\left(\text{или} \iint\limits_S \boldsymbol{a}\, d\boldsymbol{S}^+,\ d\boldsymbol{S}^+ = \boldsymbol{\nu}\, dS\right)$.

Очевидно, что $\boldsymbol{a\nu} = \text{пр}_{\nu}\, \boldsymbol{a}$, поэтому

$$\iint\limits_S \boldsymbol{a}\, d\boldsymbol{S} = \iint\limits_S \text{пр}_{\nu}\, \boldsymbol{a}\, dS.$$

Обычно в потоке $\iint\limits_{S^+} \boldsymbol{a\nu}\, dS$ опускают индекс ориентации и пишут просто $\iint\limits_S \boldsymbol{a\nu}\, dS$, считая, что в качестве ориентации взята нормаль $\boldsymbol{\nu}$, стоящая в подынтегральном выражении.

Определение 9. *Векторное поле, поток которого через любую кусочно-гладкую поверхность, лежащую в области G и являющуюся границей некоторой ограниченной области, равен нулю, называется соленоидальным в G.*

В дальнейших пунктах этого параграфа мы изучим некоторые свойства векторных полей, в частности, установим в трехмерном случае необходимые и достаточные условия потенциальности и соленоидальности поля. Предварительно мы докажем теоремы об интегралах, тесно связанные с понятиями, введенными в этом пункте.

Упражнение 1. Доказать следующие формулы:

$$\text{rot grad}\, u = 0;$$

$$\text{div rot}\, \boldsymbol{a} = 0;$$

$$\text{div grad}\, u = \Delta u, \quad \text{где } \Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2};$$

$$\text{rot rot}\, \boldsymbol{a} = \text{grad div}\, \boldsymbol{a} - \Delta \boldsymbol{a}, \quad \text{где} \quad \Delta \boldsymbol{a} = (\Delta a_x,\ \Delta a_y,\ \Delta a_z),$$

$$\boldsymbol{a} = (a_x,\ a_y,\ a_z);$$

$$\text{div}\, (f\boldsymbol{a}) = f\, \text{div}\, \boldsymbol{a} + \text{grad}\, f\boldsymbol{a};$$

$$\text{div}\, \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = \boldsymbol{b}\, \text{rot}\, \boldsymbol{a} - \boldsymbol{a}\, \text{rot}\, \boldsymbol{b}.$$

52.2. Формула Остроградского—Гаусса. Инвариантное определение дивергенции

Пусть G — область в трехмерном пространстве E^3_{xyz}, элементарная относительно оси Oz (см. п. 45.2). Следовательно, существует квадрируемая область Γ на плоскости E^2_{xy}, такая, что граница области G состоит из двух поверхностей S_1 и S_2, задаваемых соответственно представлениями $z_1 = \varphi_1(x, y)$ и $z_2 = \varphi_2(x, y)$, где φ_1 и φ_2 — непрерывные на замкнутом множестве $\overline{\Gamma}$ функции, $\varphi_1(x, y) \leqslant \varphi_2(x, y)$, $(x, y) \in \overline{\Gamma}$, и, быть может, поверхности S_0, являющейся частью цилиндрической поверхности с образующей, параллельной оси Oz и имеющей в качестве направляющей границу области Γ. Будем предполагать, кроме того, что поверхности S_1 и S_2 непрерывно дифференцируемы (т. е. что непрерывно дифференцируемы функции φ_1 и φ_2 на $\overline{\Gamma}$) и что граница γ области Γ является кусочно-гладкой кривой, тогда и поверхность S_0 также будет кусочно-гладкой. Это сразу следует из того, что если $\boldsymbol{\rho} = \boldsymbol{\rho}(u)$, $a \leqslant u \leqslant b$, — представление контура γ, то представление поверхности S_0 можно задать в виде $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(u, v) = \boldsymbol{\rho}(u) + v\boldsymbol{k}$, $a \leqslant u \leqslant b$, $a_u \leqslant v \leqslant b_u$ (пределы изменения параметра v зависят от точки кривой γ), где $\boldsymbol{k}$ — единичный орт оси Oz (рис. 167). Мы будем предполагать, далее, что область G удовлетворяет аналогичным условиям и относительно других осей координат.

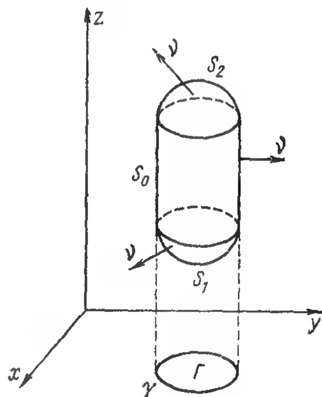


Рис. 167

Обозначим через S границу области G; очевидно, S является кусочно-гладкой поверхностью*). Обозначим через $\boldsymbol{\nu}$ внешнюю нормаль к поверхности S (в точках, где она существует) и пусть $\cos\alpha$, $\cos\beta$ и $\cos\gamma$ — ее направляющие косинусы: $\boldsymbol{\nu} = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$. Ориентированную поверхность S (соответственно поверхности S_0, S_1 и S_2) с ориентацией, порожденной выбором нормали $\boldsymbol{\nu}$, обозначим через S^+ (соответственно через S_0^+, S_1^+, S_2^+).

Таким образом, в данном случае для поверхности S_1 положительной ориентацией является ее «нижняя сторона», а для поверхности S_2 — ее «верхняя сторона» (см. п. 51.2).

*) Здесь, как и иногда выше, употребляется термин «поверхность» в смысле носителя поверхности. Это не может привести к недоразумениям.

Теорема 1 (Остроградский — Гаусс *)). *Пусть в замыкании $\overline{G}$ области G указанного выше вида заданы функции $P=P(x, y, z)$, $Q=Q(x, y, z)$ и $R=R(x, y, z)$, непрерывные на $\overline{G}$, вместе со своими частными производными $\frac{\partial P}{\partial x}$, $\frac{\partial Q}{\partial y}$, $\frac{\partial R}{\partial z}$ **), тогда*

$$\iiint\limits_G \left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right) dx\,dy\,dz =$$

$$= \iint\limits_{S^+} (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)\,dS. \qquad (52.5)$$

Эту формулу, полагая $\boldsymbol{a} = (P, Q, R)$, можно переписать в виде

$$\iiint\limits_G \operatorname{div}\boldsymbol{a}\,dx\,dy\,dz = \iint\limits_{S^+} \boldsymbol{a}\,d\boldsymbol{S}^+, \qquad (52.6)$$

т. е. интеграл по области от дивергенции векторного поля равен потоку этого поля через поверхность, ограничивающую данную область.

Доказательство. Рассмотрим, например, интеграл

$$\iiint\limits_G \frac{\partial R}{\partial z}\,dx\,dy\,dz.$$

Используя обозначения, введенные в начале этого пункта, получим

$$\iiint\limits_G \frac{\partial R}{\partial z}\,dx\,dy\,dz = \iint\limits_\Gamma \left[\int\limits_{\varphi_1(x,y)}^{\varphi_2(x,y)} \frac{\partial R}{\partial z}\,dz\right] dx\,dy =$$

$$= \iint\limits_\Gamma \{R[x, y, \varphi_2(x, y)] - R[x, y, \varphi_1(x, y)]\}\,dx\,dy =$$

$$= \iint\limits_{S_2^+} R(x, y, z)\,dx\,dy + \iint\limits_{S_1^+} R(x, y, z)\,dx\,dy. \qquad (52.7)$$

Замечая, далее, что на поверхности S_0 $\cos\gamma=0$, получим (см. (51.7))

$$\iint\limits_{S_0^+} R(x, y, z)\,dx\,dy = \iint\limits_{S_0^+} R(x, y, z)\cos\gamma\,d\boldsymbol{S} = 0.$$

---

*) М. В. Остроградский (1801—1861) — русский математик; Г. Ф. Гаусс (1777—1855) — немецкий математик.

**) Непрерывность частных производных на границе понимается как непрерывная продолжаемость их на границу области.

Поэтому формулу (52.7) можно переписать в виде

$$\iiint\limits_G \frac{\partial R}{\partial z}\,dx\,dy\,dz =$$

$$= \iint\limits_{S_2^+} R\,dx\,dy + \iint\limits_{S_1^+} R\,dx\,dy + \iint\limits_{S_0^+} R\,dx\,dy = \iint\limits_{S^+} R\,dx\,dy. \tag{52.8}$$

Совершенно аналогично доказываются формулы

$$\begin{aligned} \iiint\limits_G \frac{\partial P}{\partial x}\,dx\,dy\,dz &= \iint\limits_{S^+} P\,dy\,dz, \\ \iiint\limits_G \frac{\partial Q}{\partial y}\,dx\,dy\,dz &= \iint\limits_{S^+} Q\,dx\,dz. \end{aligned} \tag{52.9}$$

Складывая (52.8) и (52.9), в силу определений (51.7) и (51.12) мы и получим формулу (52.5), называемую *формулой Остроградского — Гаусса*.

Теорема доказана.

Отметим, что существенный для этой формулы выбор ориентации поверхности S описывается в этом случае точным математическим языком: на поверхности S_1 нормали образуют с осью Oz тупые углы, на поверхности S_2 нормали образуют с осью Oz острые углы, а на поверхности S_0 их выбор не имеет значения, так как в любом случае $\cos\gamma = 0$.

Ограничения, наложенные на поверхности S_1 и S_2, можно несколько ослабить, требуя вместо их непрерывной дифференцируемости лишь кусочную гладкость (см. п. 51.1).

Формула Остроградского — Гаусса (52.5) может быть доказана и для областей G более общего вида, а именно таких, для которых существует конечное разбиение их на области G_i, $i = 1, 2, \ldots, i_0$, выше рассмотренного вида. Для этого достаточно написать формулу Остроградского для каждой области G_i и полученные результаты сложить; в результате получается искомая формула для области G. Действительно, в левой части равенства в силу аддитивности интеграла получится соответствующий интеграл по области G, а в правой части в силу того, что внешние нормали в точках границ областей G_i, принадлежащих границам двух таких областей, направлены в разные стороны, поверхностные интегралы по соответствующим частям границ областей G_i, в сумме дадут ноль, и останутся только интегралы по частям границ G_i, составляющим в совокупности границу области G (ср. п. 47.3). Указанные разбиения области G часто бывает удобно производить плоскостями, параллельными координатным плоскостям.

Заметим, что среди областей такого типа есть и области, границы которых состоит из нескольких «кусков», т. е. может быть представлена как сумма конечного числа кусочно-гладких непересекающихся поверхностей (ср. с соответствующими обобщениями формулы Грина в п. 47.3).

Можно показать, что формула Остроградского — Гаусса справедлива для любой ограниченной области, граница которой состоит из конечного числа кусочно-гладких поверхностей. Однако это довольно громоздко, и мы не будем на этом останавливаться, а ограничимся лишь формулировкой теоремы.

Теорема 1′ (Остроградский — Гаусс). *Пусть граница ∂G ограниченной области G состоит из конечного числа кусочно-гладких поверхностей, вектор $\mathbf{a}=(P, Q, R)$ и частные производные $\frac{\partial P}{\partial x}$, $\frac{\partial Q}{\partial y}$ и $\frac{\partial R}{\partial z}$ непрерывны на $\overline{G}$, тогда*

$$\iiint\limits_G \operatorname{div} \mathbf{a}\, dx\, dy\, dz = \iint\limits_{\partial G} \mathbf{a}\, d\mathbf{S}.$$

В качестве нормали на границе ∂S здесь выбрана внешняя нормаль.

Например, если $G=\{(x, y, z): 0<a<\sqrt{x^2+y^2+z^2}<b\}$ — шаровое кольцо и, следовательно, его граница состоит из двух сфер

$$S_1=\{(x, y, z): x^2+y^2+z^2=a^2\}$$

и

$$S_2=\{(x, y, z): x^2+y^2+z^2=b^2\},$$

то на внутренней сфере S_1 надо взять нормаль, направленную к центру шара G, а на внешней сфере S_2 — от центра шара.

Формула Остроградского — Гаусса позволяет найти выражение для объема области через соответствующий поверхностный интеграл. В самом деле, полагая в (52.5) $P(x, y, z)=x$, $Q(x, y, z)=y$, $R(x, y, z)=z$ и замечая, что

$$\iiint\limits_G dx\, dy\, dz = \operatorname{mes} G,$$

получим

$$\operatorname{mes} G=\frac{1}{3}\iint\limits_{S^+}(x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma)\, dS,$$

или

$$\operatorname{mes} G=\frac{1}{3}\iint\limits_{S^+} x\, dy\, dz+y\, dz\, dx+z\, dx\, dy.$$

Формула Остроградского — Гаусса дает также возможность получить инвариантное определение дивергенции, не зависящее от

выбора системы координат, т. е. доказать, что дивергенция векторного поля однозначно в каждой точке определяется самим векторным полем и не зависит от выбора системы координат, как это могло бы показаться сначала из формулы (52.4).

Теорема 2. *Пусть в трехмерной области G*) определено непрерывно дифференцируемое векторное поле $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}(M)$. Пусть $M_0 \in G$ и D — область с кусочно-гладкой границей S такая, что $M_0 \in D$, $\overline{D} \subset G$ и для области D справедлива формула Остроградского — Гаусса**).*

Обозначим через S^+ поверхность S, ориентированную с помощью выбора внешней нормали, а через $d(D)$ — диаметр области D. Тогда

$$\operatorname{div} \boldsymbol{a}(M_0) = \lim_{d(D)\to 0} \frac{\iint \boldsymbol{a}\, d\boldsymbol{S}^+}{\operatorname{mes} D}. \qquad (52.10)$$

Доказательство. По формуле (52.6) имеем

$$\iiint\limits_D \operatorname{div} \boldsymbol{a}\, dx\, dy\, dz = \iint \boldsymbol{a}\, d\boldsymbol{S}^+. \qquad (52.11)$$

Но по интегральной теореме о среднем (п. 44.5)

$$\iiint\limits_D \operatorname{div} \boldsymbol{a}\, dx\, dy\, dz = \operatorname{div} \boldsymbol{a}(M) \operatorname{mes} D, \quad M \in D. \qquad (52.12)$$

Подставляя (52.12) в (52.11), получим

$$\operatorname{div} \boldsymbol{a}(M) = \frac{\iint \boldsymbol{a}\, d\boldsymbol{S}^+}{\operatorname{mes} D}. \qquad (52.13)$$

Переходя к пределу в формуле (52.13) при $d(D) \to 0$, в силу непрерывности в точке M_0 функции $\operatorname{div} \boldsymbol{a}(M)$, получим формулу (52.10).

Отметим, что величины, входящие в правую часть равенства (52.10), не зависят от выбора системы координат, поэтому и дивергенция не зависит от выбора системы координат.

Точки векторного поля $\boldsymbol{a}$, в которых $\operatorname{div} \boldsymbol{a} \neq 0$, называются «источниками» векторного поля. Интуитивно естественность этого термина объясняется тем обстоятельством, что если точка является «источником», то, как это видно из формулы (52.10), в этом случае для всех достаточно малых по диаметру областей D, содержащих точку M_0, будем иметь $\iint \boldsymbol{a} d\boldsymbol{S} \neq 0$, т. е. поток через любую достаточно малую поверхность, окружающую источник, не равен нулю.

*) Здесь на структуру области G не накладывается никаких ограничений.

**) Такие области D всегда существуют, например, к ним относятся все шары достаточно малого радиуса с центром в точке M_0.

52.3. Формула Стокса. Инвариантное определение вихря

Пусть S — дважды непрерывно дифференцируемая поверхность без особых точек в пространстве E^3_{xyz} и $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(u, v)$, $(u, v)\in D$, — ее представление, D — плоская ограниченная область, для которой справедлива формула Грина. Пусть γ_0 — положительно ориентированный контур, ограничивающий область D, и $u=u(t)$, $v=v(t)$, $a\leqslant t\leqslant b$, — его представление. Пусть

$$\boldsymbol{\nu}=\frac{\boldsymbol{r}_u\times\boldsymbol{r}_v}{|\boldsymbol{r}_u\times\boldsymbol{r}_v|}$$

— ориентация на поверхности S (см. определение 23 в п. 50.6), $\boldsymbol{\nu}=(\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$ и пусть нормаль $\boldsymbol{\nu}$ непрерывно продолжаема на $\overline{D}$.

Обозначим через S^+ поверхность S с выбранной на ней нормалью $\boldsymbol{\nu}$. Пусть, далее, γ — контур с представлением $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(u(t), v(t))$, $a\leqslant t\leqslant b$. Будем говорить, что *контур γ ограничивает поверхность S, а также что поверхность S натянута на контур γ.*

Пусть, наконец, G — область в пространстве E^3_{xyz} и $S\subset G$. При выполнении этих предположений имеет место следующая теорема.

Теорема 3 (Стокс *)). *Пусть функции P, Q и R непрерывны вместе со своими производными $\frac{\partial P}{\partial y}$, $\frac{\partial P}{\partial z}$, $\frac{\partial Q}{\partial x}$, $\frac{\partial Q}{\partial z}$, $\frac{\partial R}{\partial x}$, $\frac{\partial R}{\partial y}$ в области G и пусть $\boldsymbol{a}=(P, Q, R)$, тогда*

$$\int\limits_{\gamma}\boldsymbol{a}\,d\boldsymbol{r}=\iint\limits_{S}\operatorname{rot}\boldsymbol{a}\,d\boldsymbol{S}, \tag{52.14}$$

т. е. циркуляция векторного поля по контуру γ равна потоку вихря этого поля через поверхность S, ограниченную контуром γ. В координатной форме эта формула имеет вид

$$\int\limits_{\gamma}P\,dx+Q\,dy+R\,dz=$$

$$=\iint\limits_{S}\begin{vmatrix}\cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ P & Q & R\end{vmatrix}dS,$$

*) Д. Стокс (1819—1903) — английский математик и механик.

или

$$\int\limits_{\gamma} P\,dx+Q\,dy+R\,dz=$$
$$=\iint\left[\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)\cos\alpha+\left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right)\cos\beta+\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\cos\gamma\right]dS. \tag{52.15}$$

Доказательство. Рассмотрим, например, интеграл $\int\limits_{\gamma} P\,dx$. Замечая, что вдоль кривых γ_0 и γ переменные u и v являются функциями от t, и употребляя обозначения, введенные в начале этого пункта, получим

$$\int\limits_{\gamma} P(x,y,z)\,dx=$$
$$=\int\limits_a^b P[x(u(t),v(t)),\ y(u(t),v(t)),\ z(u(t),v(t))]\,x'_t(u(t),\ v(t))\,dt=$$
$$=\int\limits_{\gamma_0} P[x(u,v),y(u,v),z(u,v)]\left[\frac{\partial x(u,v)}{\partial u}du+\frac{\partial x(u,v)}{\partial v}dv\right].$$

Применим формулу Грина к получившемуся интегралу $\int\limits_{\gamma_0} P\frac{\partial x}{\partial u}du+P\frac{\partial x}{\partial v}dv$:

$$\int\limits_{\gamma} P\,dx=\iint\limits_{D}\left[\frac{\partial}{\partial u}\left(P\frac{\partial x}{\partial v}\right)-\frac{\partial}{\partial v}\left(P\frac{\partial x}{\partial u}\right)\right]du\,dv=$$
$$=\iint\limits_{D}\left[\left(\frac{\partial P}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u}+\frac{\partial P}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u}+\frac{\partial P}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial u}\right)\frac{\partial x}{\partial v}+P\frac{\partial^2 x}{\partial u\,\partial v}-\right.$$
$$\left.-\left(\frac{\partial P}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v}+\frac{\partial P}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v}+\frac{\partial P}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial v}\right)\frac{\partial x}{\partial u}-P\frac{\partial^2 x}{\partial v\,\partial u}\right]du\,dv=$$
$$=\iint\limits_{D}\left[\frac{\partial P}{\partial z}\frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)}-\frac{\partial P}{\partial y}\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right]du\,dv=$$
$$=\iint\limits_{S^+}\frac{\partial P}{\partial z}dz\,dx-\iint\limits_{S^+}\frac{\partial P}{\partial y}dx\,dy=\iint\limits_{S^+}\left(\frac{\partial P}{\partial z}\cos\beta-\frac{\partial P}{\partial y}\cos\gamma\right)dS. \tag{52.16}$$

Мы воспользовались здесь формулами (51.10) и (51.13). Аналогично доказывается, что

$$\int\limits_{\gamma} Q\,dy = \iint\limits_{S^+} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} \cos\gamma - \frac{\partial Q}{\partial z} \cos\alpha \right) dS. \tag{52.17}$$

$$\int\limits_{\gamma} R\,dz = \iint\limits_{S^+} \left(\frac{\partial R}{\partial y} \cos\alpha - \frac{\partial R}{\partial x} \cos\beta \right) dS. \tag{52.18}$$

Складывая формулы (52.16), (52.17) и (52.18), мы и получим формулу (52.15), которая называется *формулой Стокса.*

Теорема доказана.

Чтобы нагляднее представить себе связь выбора нормали $\mathbf{v}$ на поверхности S с ориентацией ограничивающего ее контура γ, рассмотрим поверхность S, имеющую явное представление $z = f(x, y)$, $(x, y) \in \overline{\Gamma}$.

Пусть γ_0 — положительно ориентированный на плоскости xOy контур, являющийся границей Γ, и $x = x(t)$, $y = y(t)$, $a \leqslant t \leqslant b$,— его представление. Как и выше ориентацию контура γ зададим представлением

$$x = x(t),\ y = y(t),\ z = f[x(t),\ y(t)],\ a \leqslant t \leqslant b. \tag{52.19}$$

В рассматриваемом случае контур γ_0 является проекцией контура γ. Нормаль же $\mathbf{v}$, как это было показано, при явном представлении поверхности образует острый угол с осью Oz (см. п. 51.1), поэтому если смотреть на поверхность S с положительного направления оси Oz, то контур γ будет ориентирован против часовой стрелки, т. е. ориентация контура γ согласована с нормалью $\mathbf{v}$ «по правилу штопора» (рис. 168).

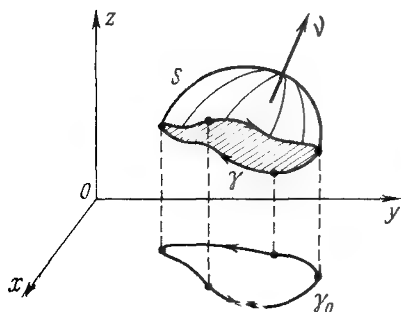


Рис. 168

Это равносильно тому, что наблюдатель, обходящий поверхность S по ориентированному контуру γ и смотрящий на поверхность S из конца нормали $\mathbf{v}$, видит поверхность S слева. Такая наглядная интерпретация согласованности ориентации нормали $\mathbf{v}$ и контура γ имеет то преимущество, что она не связана с выбором системы координат и остается справедливой для любой поверхности S, рассматриваемой в теореме Стокса, а не только для явно заданной поверхности. Конечно, все подобные рассуждения не являются математическими доказательствами, а служат лишь для наглядного пояснения формулы Стокса.

Следует заметить, что формула Стокса остается справедливой, если в ней взять противоположную ориентацию контура γ и противоположные нормали $-\boldsymbol{\nu}$: в этом случае обе части равенства (52.15) изменят знак на противоположный (при этом ориентации контура и поверхности остаются согласованными по «правилу штопора»).

Формула Стокса может быть доказана и для ориентируемых кусочно-гладких поверхностей $S = \{S_i\}_{i=1}^{i=i_0}$, а именно таких, для которых поверхности S_i, $i = 1, 2, \ldots, i_0$, удовлетворяют условиям доказанной теоремы 3. Заметим, что в этом случае край ∂S поверхности S (см. п. 50.6) может состоять из конечного числа контуров γ_j, $j = 1, 2, \ldots, j_0$.

Сформулируем теорему для этого случая (несколько завысив для простоты формулировки условия на векторное поле).

Теорема 3′ (Стокс). *Пусть вектор-функция* $\boldsymbol{a}$ *дважды непрерывно дифференцируема в области* G *и пусть* $S = \{S_i\}_{i=1}^{i=i_0}$ *ориентированная кусочно-гладкая поверхность и* ∂S *— ее край, согласованно ориентированный с поверхностью* S, *тогда*

$$\int_{\partial S} \boldsymbol{a}\, d\boldsymbol{r} = \iint_{S} \operatorname{rot} \boldsymbol{a}\, d\boldsymbol{S}. \qquad (52.20)$$

Наглядно согласование ориентаций контуров γ_j, из которых состоит край ∂S поверхности S, с ориентацией этой поверхности и, следовательно, с ориентациями $\boldsymbol{\nu}$ поверхностей S_i означает, что наблюдатель, двигающийся по контуру γ_j ($j = 1, 2, \ldots, j_0$) и смотрящий на поверхность S из конца нормали $\boldsymbol{\nu}$, видит поверхность S слева.

Чтобы доказать теорему 3′, достаточно написать формулу Стокса для каждой поверхности S_i, $i = 1, 2, \ldots, i_0$, и сложить их (ср. с обобщениями формулы Грина в п. 47.3 и теоремы Остроградского — Гаусса в п. 52.2).

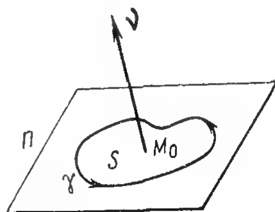


Рис. 169

Можно показать также, что формула Стокса остается справедливой и для кусочно-гладкой поверхности указанного вида, если она, кроме того, имеет конечное число конических точек.

Теорема Стокса дает возможность получить инвариантное «с точностью до знака» определение вихря векторного поля, не зависящее от выбора системы координат.

Теорема 4. *Пусть в трехмерной области* G *определено непрерывно дифференцируемое векторное поле* $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}(M)$. *Пусть* $M_0 \in G$, $\boldsymbol{\nu}$ *— произвольный фиксированный единичный вектор,* Π *— пло-*

скость, перпендикулярная вектору $\mathbf{v}$ *и проходящая через точку* M_0, S — *ограниченная область в плоскости* Π *с кусочно-гладкой границей* γ, $d(S)$ *диаметр области* S; *пусть контур согласованно ориентирован с нормалью* $\mathbf{v}$*), $M_0 \in S$ *и* $S \subset G$**) (рис. 169). *Тогда* ***)

$$\operatorname{rot}_{\mathbf{v}} \boldsymbol{a}(M_0) = \lim_{d(S)\to 0} \frac{\int\limits_{\gamma} \boldsymbol{a}\, d\boldsymbol{S}}{\operatorname{mes} S}. \tag{52.21}$$

Доказательство. По формуле Стокса

$$\int\limits_{\gamma} \boldsymbol{a}\, d\boldsymbol{r} = \iint\limits_{S} \operatorname{rot}_{\mathbf{v}} \boldsymbol{a}\, dS,$$

но по интегральной теореме о среднем

$$\iint\limits_{S} \operatorname{rot}_{\mathbf{v}} \boldsymbol{a}\, dS = \operatorname{rot}_{\mathbf{v}} \boldsymbol{a}(M) \operatorname{mes} S, \quad M \in S.$$

Следовательно,

$$\operatorname{rot}_{\mathbf{v}} \boldsymbol{a}(M) = \frac{\iint\limits_{S} \operatorname{rot}_{\mathbf{v}} \boldsymbol{a}\, dS}{\operatorname{mes} S}. \tag{52.22}$$

Заметим, что при $d(S) \to 0$ и $M \to M_0$. В силу непрерывности в точке M_0 функции $\operatorname{rot}_{\mathbf{v}} \boldsymbol{a}(M)$, переходя к пределу в формуле (52.22) при $d(S) \to 0$, получим формулу (52.21).

Теорема доказана.

Отметим, что величины, входящие в правую часть равенства (52.21), не зависят от выбора системы координат (напомним, что мы всегда рассматриваем только правую систему координат), поэтому проекция вихря векторного поля на вектор $\mathbf{v}$ не зависит от выбора системы координат. Поскольку вектор $\mathbf{v}$ был произвольный, то и сам вихрь не зависит от выбора системы координат. Действительно, достаточно, например, взять три произвольных ортогональных единичных вектора $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, $\mathbf{v}_3$, проекциями на которые, как это хорошо известно, однозначно определяется всякий вектор.

---

*) Т. е. так, как в теореме 3 (по «правилу штопора»).

**) Указанные области S, очевидно, всегда существуют (почему?).

***) Через $\operatorname{rot}_{\mathbf{v}} \boldsymbol{a}$ обозначена проекция вектора $\operatorname{rot} \boldsymbol{a}$ на вектор $\mathbf{v}$, т. е. $\operatorname{rot}_{\mathbf{v}} \boldsymbol{a} = \text{пр}_{\mathbf{v}} \operatorname{rot} \boldsymbol{a}$.

Заметим, однако, что если взять левую систему координат, то знак вихря векторного поля изменится на противоположный; формально это можно усмотреть из формулы для определения вихря (52.4): если в ней переставить местами два каких-либо столбца, то определитель изменит знак. Это обстоятельство связано и с тем, что если на некоторой гладкой ориентированной поверхности нормаль $\boldsymbol{\nu}$ согласована с ориентацией контура γ, ограничивающего эту поверхность в левой системе координат, то в правой системе координат с указанной ориентацией контура γ будет согласована уже нормаль $-\boldsymbol{\nu}$. Это естественно, так как векторное произведение двух векторов в левой и правой системе координат имеет противоположный знак, а $\boldsymbol{\nu}$ выражается формулой

$$\boldsymbol{\nu} = \frac{\boldsymbol{r}_u \times \boldsymbol{r}_v}{|\boldsymbol{r}_u \times \boldsymbol{r}_v|}.$$

52.4. Соленоидальные векторные поля

В этом пункте ограниченную область, для которой справедлива теорема Остроградского — Гаусса (см. п. 52.2) и граница которой состоит из *одной* кусочно-гладкой поверхности, будем называть *допустимой.* Поверхность S будем называть допустимой, если она является границей допустимой области.

Соленоидальность векторного поля будем понимать здесь (чтобы не усложнять изложение) формально в несколько более узком смысле, чем это было определено в п. 62.1. *Именно, непрерывно дифференцируемое в области G векторное поле $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}(M)$ будем называть соленоидальным, если его поток через любую допустимую поверхность равен нулю.*

Это соглашение введено лишь для того, чтобы при дальнейшем изложении не использовать ранее не доказанных фактов. На самом же деле, как это отмечалось в п. 52.2, теорема Остроградского — Гаусса справедлива для любой ограниченной области, граница которой состоит из конечного числа кусочно-гладких поверхностей. Поэтому любая ограниченная область, граница которой состоит из одной кусочно-гладкой поверхности, допустима. Следовательно, определения соленоидальности векторного поля, данные здесь и в п. 52.1, совпадают.

Определение 10. *Трехмерная область G называется объемно односвязной, если, какова бы ни была допустимая область D, граница которой лежит в G, сама область D также содержится в G.*

Все пространство, шар, параллелепипед являются примерами объемно односвязных областей. Область же, заключенная между двумя концентрическими сферами, не является объемно односвязной.

Оказывается, что в объемно односвязной области необходимым и достаточным условием соленоидальности поля является отсутствие в нем источников.

Теорема 5. *Для того чтобы непрерывно дифференцируемое векторное поле* $\boldsymbol{a}$ *было соленоидальным в объемно односвязной области, необходимо и достаточно, чтобы* $\operatorname{div} \boldsymbol{a} = 0$ *во всех точках области* G.

Доказательство. Если $\boldsymbol{a}$ — соленоидальное поле, то для любой допустимой поверхности S имеем

$$\iint \boldsymbol{a}\, d\boldsymbol{S} = 0.$$

Поэтому, беря, например, для любой точки $M \in G$ в качестве S сферы с центром в M таких радиусов, что ограниченные ими шары лежат в области G (это имеет место для всех достаточно малых радиусов в силу открытости множества G), мы видим, что в формуле (52.10) для определения дивергенции числитель дроби, стоящий под знаком предела, равен нулю, откуда и следует, что $\operatorname{div} \boldsymbol{a}(M) = 0$. Необходимость этого условия для соленоидальности поля доказана и даже без использования объемной односвязности области G.

Пусть теперь $\operatorname{div} \boldsymbol{a} = 0$ в G и S — какая-либо допустимая поверхность, $S \subset G$. Обозначим через D допустимую область, границей которой является поверхность S. Тогда в силу объемной односвязности области G имеем $D \subset G$ и потому в замкнутой области $\overline{D}$ определено и непрерывно дифференцируемо векторное поле $\boldsymbol{a}$. Применяя формулу Остроградского — Гаусса в области D, в силу условия $\operatorname{div} \boldsymbol{a} = 0$ получим

$$\iint_S \boldsymbol{a}\, d\boldsymbol{S} = \iiint_D \operatorname{div} \boldsymbol{a}\, dx\, dy\, dz = 0,$$

что вследствие произвольности допустимой поверхности $S \subset G$ и означает соленоидальность данного векторного поля.

Теорема доказана.

Как отмечалось выше, теорема Остроградского — Гаусса может быть доказана для произвольной ограниченной области, граница которой кусочно-гладкая, поэтому и теорема 5 является справедливой, если соленоидальность векторного поля понимать в первоначальном смысле этого слова.

52.5. Потенциальные векторные поля

В этом пункте поверхность S, для которой справедлива теорема Стокса, будем называть допустимой.

Определение 11. *Трехмерная область* G *называется поверхностно односвязной, если, какова бы ни была кусочно дважды непрерывно дифференцируемая замкнутая кривая* γ, *лежащая в области* G, *су-*

ществует допустимая поверхность S, также лежащая в области G и натянутая на контур γ (см. п. 52.3).

Если рассматриваемая область G выпуклая, то существует очень простой способ натягивания поверхностей на контур. Искомую поверхность всегда можно взять в этом случае в виде конуса с вершиной в некоторой произвольно фиксированной точке $M_0 \in G$, направляющей которого служит заданная кривая; если $\boldsymbol{\rho} = \boldsymbol{\rho}(u)$, $0 \leqslant u \leqslant 2\pi$, — представление кривой и $\boldsymbol{r}_0$ — радиус-вектор точки M_0, то искомый конус, натянутый на данный контур, задается представлением

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_0 + v[\boldsymbol{\rho}(u) - \boldsymbol{r}_0], \quad 0 \leqslant u \leqslant 2\pi, \quad 0 \leqslant v \leqslant 1.$$

Рассматривая u и v как полярные координаты, получим, что представление конуса задано на единичном круге*), причем единичная окружность γ_0 переходит в заданный контур. При этом, если исходная кривая дважды кусочно непрерывно дифференцируема, то и полученный конус является дважды кусочно непрерывно дифференцируемым, быть может, с одной конической точкой и для него справедлива теорема Стокса. Таким образом, мы доказали, что всякая выпуклая область (в частности, все пространство) поверхностно односвязна.

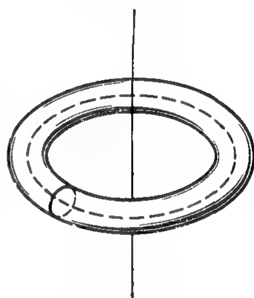


Рис. 170

Примером не поверхностно односвязной области является тор, т. е. область, образуемая вращением круга вокруг не пересекающей его оси (рис. 170).

Оказывается, что в поверхностно односвязной области векторное поле потенциально **) тогда и только тогда, когда оно безвихревое.

Теорема 6. *Пусть в поверхностно односвязной области G задано непрерывно дифференцируемое векторное поле $\boldsymbol{a} = (P, Q, R)$. Тогда эквивалентны следующие три свойства:*

1. *Векторное поле $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}(M)$ является в G потенциальным.*

2. *В G существует потенциальная функция $u = u(M)$, т. е. такая функция $u(M)$, что $\boldsymbol{a} = \operatorname{grad} u$, или, что то же,*

$$du = P\,dx + Q\,dy + R\,dz.$$

---

*) Мы рассматривали только такие представления поверхности $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(u, v)$, в которых параметры u и v являлись декартовыми координатами точки на плоскости. Очевидно, не представляет труда получить в нашем случае подобное представление рассматриваемого конуса.

**) Определение потенциальности поля см. в п. 51.1.

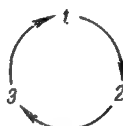
В этом случае для любых двух точек $A \in G$ и $B \in G$ и любой кусочно гладкой кривой $\overset{\frown}{AB}$, соединяющей в G эти точки,

$$\int_{\overset{\frown}{AB}} \boldsymbol{a}\, d\boldsymbol{r} = u(B) - u(A).$$

3. *Векторное поле $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}(M)$ является безвихревым*: $\operatorname{rot} \boldsymbol{a} = 0$ *в G, или*

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}, \quad \frac{\partial Q}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial y}, \quad \frac{\partial R}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial z}.$$

Доказательство. Применим схему:



Первый шаг: $1 \to 2$. Это утверждение, т. е. существование потенциальной функции, доказывается совершенно аналогично рассмотренному раньше случаю плоской области (см. теорему 3 в п. 47.8), и поэтому мы не будем приводить его доказательства.

Второй шаг: $2 \to 3$. Утверждение $2 \to 3$ также доказывается аналогично плоскому случаю: оно означает просто-напросто равенство соответствующих смешанных производных потенциальной функции.

Утверждения $1 \to 2$ и $2 \to 3$ справедливы и без предположения поверхностной односвязности области G.

Третий шаг: $3 \to 1$. Пусть $\operatorname{rot} \boldsymbol{a} = 0$ в G и пусть сначала γ — кусочно дважды непрерывно дифференцируемая замкнутая кривая, лежащая в G.

В силу поверхностной односвязности области G существует допустимая поверхность S, содержащаяся в G и ограниченная контуром γ Из теоремы Стокса сразу получаем

$$\int_{\gamma} \boldsymbol{a}\, d\boldsymbol{r} = \iint_{S} \operatorname{rot} \boldsymbol{a}\, d\boldsymbol{S} = 0.$$

Это верно, в частности, для любой конечнозвенной ломаной. Поэтому, если γ — любая кусочно-гладкая замкнутая кривая, лежащая в G, то, выбирая последовательность ломаных λ_n, вписанных в γ со звеньями, стремящимися к нулю, мы, согласно лемме п. 47 8, получим

$$\int_{\gamma} \boldsymbol{a}\, d\boldsymbol{r} = \lim_{n \to \infty} \int_{\lambda_n} \boldsymbol{a}\, d\boldsymbol{r} = 0.$$

Теорема доказана.

Упражнение 2. Доказать, что

$$\iint_S (\boldsymbol{a} \times \operatorname{grad} \varphi)\, d\boldsymbol{S} = \iiint_G (\operatorname{grad} \varphi \times \operatorname{rot} \boldsymbol{a})\, dx\, dy\, dz.$$

Здесь предполагается, что для области G, ограниченной поверхностью S, справедлива теорема Остроградского — Гаусса.

§ 53. СОБСТВЕННЫЕ ИНТЕГРАЛЫ, ЗАВИСЯЩИЕ ОТ ПАРАМЕТРА

53.1. Определение интегралов, зависящих от параметра; их непрерывность и интегрируемость по параметру

Пусть Y — некоторое множество вещественных чисел, $\varphi(y)$ и $\psi(y)$ — две функции, определенные на множестве Y, $\varphi(y) \leqslant \psi(y)$ и функция $f(x, y)$ определена на множестве

$$\{(x, y): y \in Y, \quad x \in [\varphi(y), \quad \psi(y)]\}. \tag{53.1}$$

Интегралы вида

$$\Phi(y) = \int_{\varphi(y)}^{\psi(y)} f(x, y)\, dx \tag{53.2}$$

называются *интегралами, зависящими от параметра*, а переменная y обычно называется *параметром*.

Часто встречается частный случай такого типа интегралов, когда функции φ и ψ постоянны, т. е. интегралы вида

$$\Phi(y) = \int_a^b f(x, y)\, dx. \tag{53.3}$$

Если множество Y является множеством натуральных чисел $Y = \{1, 2, \ldots, n, \ldots\}$, то, полагая $f(x, n) = f_n(x)$, $n = 1, 2, \ldots$, интеграл (53.3) можно переписать в виде

$$\int_a^b f_n(x)\, dx, \quad n = 1, 2, \ldots,$$

т. е. получаются интегралы от функций некоторой заданной последовательности.

Мы рассмотрим случай, когда множество Y представляет собой отрезок $[\alpha, \beta]$, функции $\varphi(y)$ и $\psi(y)$ непрерывны на этом отрезке и $\varphi(y) \leqslant \psi(y)$, $y \in [\alpha, \beta]$. Пусть графики функций $\varphi(y)$ и $\psi(y)$ и, быть

может, отрезки прямых $y=\alpha$ и $y=\beta$ образуют границу ограниченной области G (рис. 171). Очевидно, G — квадрируемая область (см. п. 44.2), элементарная относительно оси Ox (см. п. 45.1). В этом случае множество (53.1), на котором определена функция $f(x, y)$, является замыканием $\overline{G}$ указанной области G:

$$\overline{G}=\{(x, y): \alpha \leqslant y \leqslant \beta, \quad \varphi(y) \leqslant x \leqslant \psi(y)\}. \tag{53.4}$$

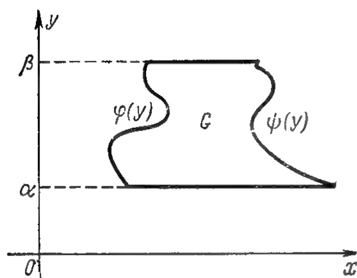


Рис. 171

В дальнейшем мы изучим свойства функции $\Phi(y)$ (ее непрерывность, правила ее дифференцирования и интегрирования) в зависимости от свойств функции $f(x, y)$ и функций $\varphi(y)$, $\psi(y)$. Некоторые из этих свойств были получены раньше при изучении соответствующих свойств кратного интеграла. Так, например, лемма, доказанная в п. 45.1, дает условия, при которых интеграл, зависящий от параметра, является непрерывной функцией этого параметра. Перефразируем здесь эту лемму в обозначениях настоящего параграфа в виде теоремы.

Теорема 1. *Если функция $f(x, y)$ непрерывна на замыкании $\overline{G}$ области G* (см. (53.4)), *то функция $\Phi(y)$ непрерывна на отрезке* $[\alpha, \beta]$.

Утверждению этой теоремы можно придать следующий вид:

$$\lim_{y\to y_0}\int\limits_{\varphi(y)}^{\psi(y)} f(x, y)dx=\int\limits_{\lim\limits_{y\to y_0}\varphi(y)}^{\lim\limits_{y\to y_0}\psi(y)} \lim_{y\to y_0} f(x, y)\,dx. \tag{53.5}$$

Действительно, из теоремы 1 следует, что предел, стоящий в левой части равенства (53.5), равен $\Phi(y_0)$, а в силу непрерывности функций φ, ψ и f, правая часть равенства также равна

$$\int\limits_{\varphi(y_0)}^{\psi(y_0)} f(x, y_0)\,dx=\Phi(y_0).$$

В частности, для интеграла (53.3) имеем

$$\lim_{y\to y_0}\int\limits_a^b f(x, y)\,dx=\int\limits_a^b \lim_{y\to y_0} f(x, y)dx,$$

т. е. в этом случае возможен предельный переход под знаком интеграла.

В теореме о предельном переходе под знаком интеграла можно ослабить требования, накладываемые на функцию $f(x, y)$, потребовав вместо ее непрерывности по совокупности переменных, лишь непрерывность по одной переменной и равномерное стремление к пределу по другой.

Теорема 2. *Пусть функция $f(x, y)$ определена для $x \in [a, b]$ и $y \in Y$, непрерывна по x на $[a, b]$ при любом фиксированном $y \in Y$. Тогда если при $y \to y_0$**) *функция $f(x, y)$ равномерно на отрезке $[a, b]$ стремится к функции $\varphi(x)$* (см. п. 39.4), *то*

$$\lim_{y \to y_0} \int_a^b f(x, y)\, dx = \int_a^b \varphi(x)\, dx.$$

Доказательство. Возьмем какую-либо последовательность $y_n \in Y$, $n = 1, 2, \ldots$, такую, что $\lim_{n \to \infty} y_n = y_0$, тогда (см. упражнение 5 в п. 39.4) последовательность $\varphi_n(x) = f(x, y_n)$ будет равномерно на отрезке $[a, b]$ стремиться к функции $\varphi(x)$, отсюда следует (см. п. 36.3), во-первых, что $\varphi(x)$ непрерывна и, следовательно, интегрируема на отрезке $[a, b]$, а во-вторых, что

$$\lim_{n \to \infty} \int_a^b f(x, y_n)\, dx = \lim_{n \to \infty} \int_a^b \varphi_n(x)\, dx = \int_a^b \varphi(x)\, dx,$$

и так как это верно для любой указанной последовательности $\{y_n\}$, то теорема доказана.

Рассмотрим теперь вопрос об интегрировании интегралов (53.2), зависящих от параметра.

Теорема 3. *Пусть область G элементарна относительно обеих осей координат*, т. е.

$$G = \{(x, y) : \alpha < y < \beta,\ \varphi(y) < x < \psi(y)\} = \\ = \{(x, y) : a < x < b,\ \varphi_1(x) < y < \psi_1(x)\},$$

где функции φ и ψ непрерывны на отрезке $[\alpha, \beta]$, а функции φ_1 и ψ_1 на отрезке $[a, b]$. Тогда, если функция $f(x, y)$ непрерывна на замыкании $\overline{G}$ области G, то

$$\int_\alpha^\beta \Phi(y)\, dy = \int_\alpha^\beta \left[\int_{\varphi(y)}^{\psi(y)} f(x, y)\, dx \right] dy = \int_a^b \left[\int_{\varphi_1(x)}^{\psi_1(x)} f(x, y)\, dy \right] dx = \\ = \iint_G f(x, y)\, dx\, dy. \qquad (53.6)$$

Очевидно, теорема 3 является перефразировкой соответствующей теоремы о сведении кратного интеграла к повторному (см. п. 45.1).

*) Здесь y_0 — число или один из символов: ∞, $+\infty$, $=$ или $-\infty$.

53.2. Дифференцирование интегралов, зависящих от параметра

При изучении дифференциальных свойств интегралов, зависящих от параметра, рассмотрим сначала интегралы вида (53.3).

Теорема 4 (правило Лейбница). *Если функция* $f(x, y)$ *и ее частная производная* $\frac{\partial f(x, y)}{\partial y}$ *непрерывны в замкнутом прямоугольнике* $\Delta = \{(x, y) : a \leqslant x \leqslant b,\ \alpha \leqslant y \leqslant \beta\}$, *то функция*

$$\Phi(y) = \int_a^b f(x, y)\, dx$$

дифференцируема на отрезке $[\alpha, \beta]$ *и*

$$\frac{d\Phi(y)}{dy} = \int_a^b \frac{\partial f(x, y)}{\partial y}\, dx.$$

Таким образом, чтобы при сделанных предположениях продифференцировать интеграл, зависящий от параметра, надо продифференцировать подынтегральное выражение.

Доказательство. Пусть $y \in [\alpha, \beta]$ и $y + \Delta y \in [\alpha, \beta]$, тогда

$$\frac{\Phi(y + \Delta y) - \Phi(y)}{\Delta y} = \frac{1}{\Delta y} \int_a^b [f(x, y + \Delta y) - f(x, y)]\, dx =$$

$$= \int_a^b \frac{\partial f(x, y + \theta \Delta y)}{\partial y}\, dx, \quad 0 < \theta < 1.$$

Здесь применена теорема Лагранжа о среднем.

Обозначая теперь через $\omega\left(\delta; \frac{\partial f}{\partial y}\right)$ модуль непрерывности функции $\frac{\partial f}{\partial y}$, получим

$$\left| \frac{\Phi(y + \Delta y) - \Phi(y)}{\Delta y} - \int_a^b \frac{\partial f(x, y)}{\partial y}\, dx \right| \leqslant \int_a^b \left| \frac{\partial f(x, y + \theta \Delta y)}{\partial y} - \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} \right| dx \leqslant \int_a^b \omega\left(\Delta y; \frac{\partial f}{\partial y}\right) dx \leqslant \omega\left(\Delta y; \frac{\partial f}{\partial y}\right)(b - a). \quad (53.7)$$

В силу равномерной непрерывности функции $\frac{\partial f}{\partial y}$ на прямоугольнике Δ имеем $\lim\limits_{\Delta y \to 0} \omega\left(\Delta y; \frac{\partial f}{\partial y}\right) = 0$; поэтому из (53.7) получаем

$$\lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Phi(y + \Delta y) - \Phi(y)}{\Delta y} = \int_a^b \frac{\partial f(x, y)}{\partial y}\, dx.$$

Таким образом, теорема доказана. Она легко обобщается и на случай интеграла, зависящего от параметра общего вида (53.2).

Теорема 4'. *Пусть функция $f(x, y)$ и ее частная производная $\frac{\partial f(x, y)}{\partial y}$ непрерывны на прямоугольнике*

$$\Delta = \{(x, y):\ a \leqslant x \leqslant b,\quad \alpha \leqslant y \leqslant \beta\},$$

пусть $\overline{G} \subset \Delta$ (см. (53.4)) и пусть функции $\varphi(y)$ и $\psi(y)$ имеют непрерывные на отрезке $[\alpha, \beta]$ производные, тогда и интеграл (53.2), зависящий от параметра, также имеет производную на отрезке $[\alpha, \beta]$, причем

$$\frac{d\Phi}{dy} = \int_{\varphi(y)}^{\psi(y)} \frac{\partial f(x, y)}{\partial y}\, dx - f[\varphi(y), y]\frac{d\varphi(y)}{dy} + f[\psi(y), y]\frac{d\psi(y)}{dy}. \quad (53.8)$$

Доказательство. Рассмотрим функцию

$$F(y, u, v) = \int_u^v f(x, y)\, dx,\ a \leqslant u \leqslant b,\ a \leqslant v \leqslant b,\ \alpha \leqslant y \leqslant \beta.$$

Функция F имеет непрерывные частные производные $\frac{\partial F}{\partial y}, \frac{\partial F}{\partial u}, \frac{\partial F}{\partial v}$ и связь между функциями Φ и F устанавливается формулой

$$\Phi(y) = F(y, \varphi(y), \psi(y)),$$

поэтому

$$\frac{d\Phi}{dy} = \frac{\partial F}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial u}\frac{du}{dy} + \frac{\partial F}{\partial v}\frac{dv}{dy}. \quad (53.9)$$

Согласно правилу дифференцирования интеграла по пределам интегрирования (см. п. 29.2), имеем

$$\frac{\partial F}{\partial u} = -f(u, y),\ \frac{\partial F}{\partial v} = f(v, y), \quad (53.10)$$

а из доказанной выше теоремы 4 следует, что

$$\frac{\partial F}{\partial y} = \int_u^v \frac{\partial f(x, y)}{\partial y}\, dx. \quad (53.11)$$

Подставляя (53.10) и (53.11) в (53.9) и полагая $u = \varphi(y)$, $v = \psi(y)$, получим формулу (53.8).

Теорема доказана.

§ 54. НЕСОБСТВЕННЫЕ ИНТЕГРАЛЫ, ЗАВИСЯЩИЕ ОТ ПАРАМЕТРА

54.1. Основные определения. Равномерная сходимость интегралов, зависящих от параметра

Мы будем рассматривать интегралы вида

$$\Phi(y)=\int\limits_a^b f(x, y)\,dx, \tag{54.1}$$

где $-\infty \leqslant a < b \leqslant +\infty$, переменная y принадлежит некоторому множеству Y и интеграл (54.1) при некоторых (в частности, при всех) значениях y является несобственным.

Определение 1. *Если для каждого $y_0 \in Y$ интеграл*

$$\Phi(y_0)=\int\limits_a^b f(x, y_0)\,dx$$

сходится, то интеграл (54.1) *называется сходящимся на множестве Y.*

В дальнейшем, если не оговорено что-либо другое, будем рассматривать только случай, когда:

1) $-\infty \leqslant a < b \leqslant +\infty$;

2) при любом $y \in Y$ функция $f(x, y)$ по переменной x интегрируема по Риману на каждом отрезке $[a, \eta]$, где η таково, что $a < \eta < b$.

В этом случае сходимость интеграла (54.1) на множестве Y означает, что при любом $y \in Y$ существует предел

$$\lim_{\eta \to b-0} \int\limits_a^\eta f(x, y)\,dx = \int\limits_a^b f(x, y)\,dx$$

(если $b=+\infty$, то $b-0=+\infty$).

Это эквивалентно условию, что при любом фиксированном $y \in Y$

$$\lim_{\eta \to b-0} \int\limits_\eta^b f(x, y)\,dx = 0.$$

Таким образом, *интеграл* (54.1) *сходится на множестве Y тогда и только тогда, когда при каждом фиксированном $y \in Y$ для любого числа $\varepsilon > 0$ существует такое $\eta_\varepsilon = \eta_\varepsilon(y) < b$, что если $\eta_\varepsilon \leqslant \eta < b$, то*

$$\left|\int\limits_\eta^b f(x, y)\,dx\right| < \varepsilon. \tag{54.2}$$

Чтобы сформулировать условия, при которых для несобственных интегралов, зависящих от параметра, справедливы теоремы, аналогичные доказанным в предыдущем параграфе для собственных интегралов, зависящих от параметра, полезно понятие так называемой равномерной сходимости интеграла.

Будем предполагать, как было отмечено, что интеграл (54.1) удовлетворяет вышеуказанным условиям 1 и 2.

Определение 2. *Сходящийся на множестве Y интеграл $\int\limits_a^b f(x, y)\,dx$ называется равномерно сходящимся на этом множестве, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\eta_\varepsilon < b$, что для всех $y \in Y$ и всех η, таких, что $\eta_\varepsilon \leqslant \eta < b$, выполняется неравенство* $\left|\int\limits_\eta^b f(x, y)\,dx\right| < \varepsilon$.

Приведенные определения напоминают соответствующие определения для рядов (см. п. 36.1 и 36.2).

Между ними действительно есть большая связь. Пусть $\{\eta_n\}$ — некоторая последовательность такая, что $\eta_1 = a$, $\eta_n \in [a, b]$, $n = 1, 2, \ldots$, и $\lim\limits_{n\to\infty} \eta_n = b$.

Наряду с интегралом (54.1) рассмотрим ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \int\limits_{\eta_k}^{\eta_{k+1}} f(x, y)\,dx. \tag{54.3}$$

Пусть

$$S_n(y) = \sum_{k=1}^{n-1} \int\limits_{\eta_k}^{\eta_{k+1}} f(x, y)\,dx = \int\limits_a^{\eta_n} f(x, y)\,dx$$

— частичная сумма ряда (54.3). Тогда, если интеграл (54.1) сходится (соответственно равномерно сходится) на множестве Y, то сходится (соответственно равномерно сходится) на множестве Y и ряд (54. 3), при этом

$$\int\limits_a^b f(x, y)\,dx = \lim_{n\to\infty} \int\limits_a^{\eta_n} f(x, y)\,dx = \lim_{n\to\infty} S_n(y).$$

Определение равномерной сходимости интеграла можно перефразировать еще следующим образом.

Определение 2'. *Сходящийся на множестве Y интеграл* (54.1) *называется равномерно сходящимся на этом множестве, если*

$$\lim_{\eta\to b-0}\ \sup_{y\in Y} \left|\int\limits_\eta^b f(x, y)\,dx\right| = 0. \tag{54.4}$$

Действительно, если интеграл (54.1) равномерно сходится на множестве Y в смысле определения 2, то для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\eta_\varepsilon < b$, что выполняется неравенство (54.2) при $y \in Y$ и $\eta_\varepsilon \leqslant \eta < b$ и, следовательно,

$$\sup_{y \in Y} \left| \int_\eta^b f(x, y)\, dx \right| \leqslant \varepsilon, \quad \eta_\varepsilon \leqslant \eta < b,$$

откуда и следует (54.4). Обратно, если рассматриваемый интеграл равномерно сходится на множестве Y в смысле определения 2′, то из условия (54.4) для любого $\varepsilon > 0$ следует существование такого числа η_ε, что при $y \in Y$ и $\eta_\varepsilon \leqslant \eta < b$ выполняется неравенство (54.2).

Наконец, заметим, что равномерная сходимость на множестве Y интеграла (54.1) означает просто равномерное стремление на множестве Y функции

$$\Phi(y, \eta) = \int_a^\eta f(x, y)\, dx$$

при $\eta \to b - 0$ к функции (54.1).

Действительно, последнее означает (см. п. 39.3), что для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\eta_\varepsilon < b$, что для каждого η, удовлетворяющего условию $\eta_\varepsilon \leqslant \eta < b$ и всех $y \in Y$ выполняется неравенство

$$|\Phi(y) - \Phi(y, \eta)| < \varepsilon. \qquad (54.5)$$

Но

$$\Phi(y) - \Phi(y, \eta) = \int_a^b f(x, y)\, dx - \int_a^\eta f(x, y)\, dx = \int_\eta^b f(x, y)\, dx,$$

поэтому выполнение неравенства (54.5) эквивалентно равномерной сходимости интеграла (54.1).

Пример. Рассмотрим интеграл

$$\Phi(y) = \int_0^{+\infty} y e^{-xy}\, dx. \qquad (54.6)$$

За множество Y возьмем полуось $y \geqslant 0$ (при любом $y < 0$ интеграл (54.6) расходится). Легко убедиться, что интеграл (54.6) сходится на Y. Для любого $\alpha > 0$ интеграл (54.6) на промежутке $[\alpha, +\infty)$ сходится равномерно. Действительно, в этом случае легко проверяется, например, выполнение условия (54.4):

$$\lim_{\eta \to +\infty} \sup_{y \geqslant \alpha} \left| \int_\eta^{+\infty} y e^{-xy}\, dx \right| = \lim_{\eta \to +\infty} \sup_{y \geqslant \alpha} e^{-\eta y} = \lim_{\eta \to +\infty} e^{-\alpha\eta} = 0.$$

На всей же полуоси Y интеграл (54.6) не сходится равномерно. В самом деле,

$$\lim_{\eta\to+\infty}\sup_{y\geqslant 0}\left|\int\limits_{\eta}^{+\infty} ye^{-xy}dx\right| = \lim_{\eta\to+\infty}\sup_{y\geqslant 0} e^{-\eta y}=1,$$

т. е. на множестве Y условие (54.4) не выполняется.

Теорема 1 ***(признак Вейерштрасса).*** *Если существует функция $\varphi(x)$, определенная на промежутке $[a, b)$ и интегрируемая по Риману на каждом отрезке $[a, \eta]$, где $a<\eta<b$, такая, что:*

1) $|f(x, y)|\leqslant\varphi(x)$, где $a\leqslant x<b$, $y\in Y$;

2) *интеграл* $\int\limits_a^b\varphi(x)\,dx$ *сходится,*

то интеграл (54.1) *равномерно сходится на множестве Y.*

Доказательство. Прежде всего, в силу признака сравнения (см. п. 33.3 и 34.3) интеграл (54.1) абсолютно, а значит, и просто сходится при любом $y\in Y$. Далее, в силу сходимости интеграла $\int\limits_a^b\varphi(x)dx$ для любого числа $\varepsilon>0$ существует такое $\eta_\varepsilon<b$, что если $\eta_\varepsilon\leqslant\eta<b$, то $\int\limits_\eta^b\varphi(x)dx<\varepsilon$. Тогда, в силу условия 1 теоремы

$$\left|\int\limits_\eta^b f(x, y)\,dx\right|\leqslant\int\limits_\eta^b|f(x, y)|\,dx\leqslant\int\limits_\eta^b\varphi(x)\,dx<\varepsilon,\quad \eta_\varepsilon\leqslant\eta<b,\ y\in Y,$$

а это и означает равномерную сходимость интеграла $\int\limits_a^b f(x, y)\,dx$ на множестве Y.

Теорема доказана.

С помощью признака Вейерштрасса, например, сразу устанавливается, что интеграл

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{1+x^2+y^2}$$

равномерно сходится на всей вещественной оси $-\infty<y<+\infty$. Действительно, интеграл $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{1+x^2}$ сходится, и при любых x и y выполняется неравенство

$$\frac{1}{1+x^2+y^2}\leqslant\frac{1}{1+x^2}.$$

Упражнение 1. Пусть функции $f(x)$ и $g(x, y)$ непрерывны по x, пусть функция $g(x, y)$ монотонно и равномерно относительно $y \in Y$ стремится к нулю при $x \to \infty$, имеет непрерывную производную $\frac{\partial g(x, y)}{\partial x}$, $x \geqslant a$, $y \in Y$, и пусть интеграл $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx$ сходится, тогда интеграл $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,g(x, y)\,dx$ равномерно сходится на множестве Y.

54.2. Свойства несобственных интегралов, зависящих от параметра

При изучении свойств несобственных интегралов, зависящих от параметра, очень часто придется иметь дело с перестановкой предельных переходов по различным переменным. Поэтому прежде всего докажем лемму, относящуюся к этому вопросу.

Лемма. *Пусть X и Y — два числовых множества, функция $f(x, y)$ определена на их произведении $X \times Y$* (см. п. 41.2). *Пусть, далее, x_0 и y_0 — числа или символы ∞, $+\infty$, $-\infty$ и пусть существуют простые пределы*

$$\varphi(x) = \lim_{y \to y_0} f(x, y),\ x \in X,\ \text{и}\ \ \psi(y) = \lim_{x \to x_0} f(x, y),\ \ y \in Y.$$

Если стремление функции f хоть к одному из указанных пределов происходит равномерно, то существуют и равны оба повторных предела:

$$\lim_{x \to x_0} \lim_{y \to y_0} f(x, y) = \lim_{y \to y_0} \lim_{x \to x_0} f(x, y).$$

Доказательство. Пусть, например, функция $f(x, y)$ равномерно на X стремится к $\varphi(x)$ при $y \to y_0$. Тогда для любого фиксированного $\varepsilon > 0$ существует окрестность $O(y_0)$, такая, что, каковы бы ни были $y \in O(y_0) \cap Y$ и $x \in X$, выполняется неравенство

$$|f(x, y) - \varphi(x)| < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{54.7}$$

Если $y_1 \in O(y_0) \cap Y$ и $y_2 \in O(y_0) \cap Y$, то

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leqslant |f(x, y_1) - \varphi(x)| + |\varphi(x) - f(x, y_2)| < \varepsilon.$$

Переходя здесь к пределу при $x \to x_0$, получим

$$|\psi(y_1) - \psi(y_2)| \leqslant \varepsilon. \tag{54.8}$$

Согласно критерию Коши для существования предела функции (см. п. 4.9), из (54.8) следует существование конечного предела

$$\lim_{y \to y_0} \psi(y) = A.$$

Итак, доказано существование повторного предела

$$\lim_{y \to y_0} \lim_{x \to x_0} f(x, y) = A.$$

Зафиксируем теперь $y_1 \in O(y_0) \cap Y$, тогда из (54.7) при $y = y_1$ и из (54.8) при $y_2 \to y_0$ соответственно получим

$$|f(x, y_1) - \varphi(x)| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad |\psi(y_1) - A| \leqslant \varepsilon. \tag{54.9}$$

Прификсируем $y_1 \in O(y_0) \cap Y$, для заданного $\varepsilon > 0$ найдется окрестность $O(x_0)$, такая, что для всех $x \in O(x_0) \cap X$ будем иметь

$$|f(x, y_1) - \psi(y_1)| < \varepsilon. \tag{54.10}$$

Из неравенств (54.9) и (54.10) для всех $x \in O(x_0) \cap X$ имеем

$$|\varphi(x) - A| \leqslant |\varphi(x) - f(x, y_1)| + |f(x, y_1) - \psi(y_1)| + |\psi(y_1) - A| < 3\varepsilon,$$

что и означает существование повторного предела

$$A = \lim_{x \to x_0} \varphi(x) = \lim_{x \to x_0} \lim_{y \to y_0} f(x, y).$$

Теорема доказана.

Теорема 2. *Пусть* $-\infty < a < b \leqslant +\infty$ *и функция* $f(x, y)$ *определена при* $x \in [a, b)$, $y \in Y$ *и непрерывна по* x *на* $[a, b)$. *Тогда если при любом* $\eta \in [a, b)$ *функция* $f(x, y)$ *равномерно на отрезке* $[a, \eta]$ *стремится к функции* $\varphi(x)$ *при* $y \to y_0$ *) *и интеграл*

$$\int_a^b f(x, y)\, dx \tag{54.11}$$

равномерно сходится на множестве Y, *то*

$$\lim_{y \to y_0} \int_a^b f(x, y)\, dx = \int_a^b \lim_{y \to y_0} f(x, y)\, dx = \int_a^b \varphi(x)\, dx. \tag{54.12}$$

Доказательство. Если $a < \eta < b$, то в силу теоремы 2 п. 53.1 имеем

$$\lim_{y \to y_0} \int_a^\eta f(x, y)\, dx = \int_a^\eta \lim_{y \to y_0} f(x, y)\, dx = \int_a^\eta \varphi(x)\, dx, \tag{54.13}$$

поэтому, согласно определению несобственного интеграла, равенство (54.12) можно переписать в виде

$$\lim_{y \to y_0} \lim_{\eta \to b-0} \int_a^\eta f(x, y)\, dx = \lim_{\eta \to b-0} \lim_{y \to y_0} \int_a^\eta f(x, y)\, dx. \tag{54.14}$$

---

*) Здесь y_0 — число или один из символов: ∞, $+\infty$, $-\infty$.

Таким образом, остается доказать возможность перестановки порядка предельных переходов для функции

$$\Phi(y, \eta) = \int_a^\eta f(x, y)\, dx.$$

Это следует из доказанной выше леммы. В самом деле, согласно (54.13), существует предел $\lim\limits_{y \to y_0} \Phi(y, \eta)$, с другой стороны, существует и предел

$$\lim_{\eta \to b-0} \Phi(y, \eta) = \lim_{\eta \to b-0} \int_a^\eta f(x, y)\, dx = \int_a^b f(x, y)\, dx,$$

причем здесь, согласно условию теоремы, стремление к пределу происходит равномерно на множестве Y. Следовательно, справедливость равенства (54.14) непосредственно вытекает из утверждения леммы.

Теорема доказана.

Теорема 3. *Пусть функция $f(x, y)$ определена и непрерывна (как функция двух переменных) на полуоткрытом «прямоугольнике»*

$$\{(x, y): a \leqslant x < b,\quad c \leqslant y \leqslant d\},$$

$$-\infty < a < b \leqslant +\infty,\ -\infty < c < d < +\infty.$$

Тогда, если интеграл

$$\Phi(y) = \int_a^b f(x, y)\, dx$$

сходится равномерно на отрезке $[c, d]$, то он является непрерывной функцией на этом отрезке.

Доказательство. Каково бы ни было $y_0 \in [c, d]$, функция $f(x, y)$ при $y \to y_0$ равномерно на любом отрезке $[a, \eta]$, $a < \eta < b$, стремится к функции $f(x, y_0)$ (см. п. 39.4), поэтому, согласно предыдущей теореме (см. (54.12)),

$$\lim_{y \to y_0} \Phi(y) = \int_a^b \lim_{y \to y_0} f(x, y)\, dx = \int_a^b f(x, y_0)\, dx = \Phi(y_0).$$

Теорема доказана.

Теорема 4. *В предположениях теоремы 3*

$$\int_c^d \Phi(y)\, dy = \int_c^d dy \int_a^b f(x, y)\, dx = \int_a^b dx \int_c^d f(x, y)\, dy. \qquad (54.15)$$

Доказательство. Если $a < \eta < b$, то по теореме 3 п. 53.1 имеем

$$\int_c^d dy \int_a^\eta f(x, y)\, dx = \int_a^\eta dx \int_c^d f(x, y)\, dy. \tag{54.16}$$

Функция

$$\Phi(y, \eta) = \int_a^\eta f(x, y)\, dx$$

непрерывна по y и при $\eta \to b - 0$ равномерно на отрезке $[c, d]$ стремится к своему пределу $\Phi(y)$, поэтому, согласно теореме 2 п. 53.1, в левой части равенства (54.16) можно перейти к пределу под знаком интеграла при $\eta \to b - 0$:

$$\lim_{\eta \to b-0} \int_c^d \Phi(y, \eta)\, dy = \int_c^d \lim_{\eta \to b-0} \Phi(y, \eta)\, dy =$$
$$= \int_c^d \Phi(y)\, dy = \int_c^d dy \int_a^b f(x, y)\, dx;$$

при этом полученный предел конечен. Следовательно, при $\eta \to b - 0$ существует тот же предел и у правой части равенства (54.16), который в силу определения несобственного интеграла равен

$$\int_a^b dx \int_c^d f(x, y)\, dy.$$

Теорема доказана.

Докажем одну теорему о перестановке порядка интегрирования для случая, когда оба интеграла несобственные.

Теорема 5. *Пусть функция $f(x, y)$ определена и непрерывна в полуоткрытом прямоугольнике*

$$\{(x, y): a \leqslant x < b,\ c \leqslant y < d\},$$
$$-\infty < a < b \leqslant +\infty, \quad -\infty < c < d \leqslant +\infty.$$

Если интеграл

$$\int_a^b f(x, y)\, dx \tag{54.17}$$

равномерно сходится на любом отрезке $[c, \eta]$, $c < \eta < d$, а интеграл

$$\int_c^d f(x, y)\, dy \tag{54.18}$$

равномерно сходится на любом отрезке $[a, \xi]$, $a < \xi < b$, *и существует один из двух повторных интегралов* $\int\limits_c^d dy \int\limits_a^b |f(x, y)|\, dx$, $\int\limits_a^b dx \int\limits_c^d |f(x, y)|\, dy$, *то существуют и равны между собой оба повторных интеграла* $\int\limits_c^d dy \int\limits_a^b f(x, y)\, dx$ *и* $\int\limits_a^b dx \int\limits_c^d f(x, y)\, dy$, *т. е.*

$$\int\limits_c^d dy \int\limits_a^b f(x, y)\, dx = \int\limits_a^b dx \int\limits_c^d f(x, y)\, dy. \tag{54.19}$$

Доказательство. Пусть, например, существует интеграл

$$\int\limits_a^b dx \int\limits_c^d |f(x, y)|\, dy \tag{54.20}$$

и пусть $c < \eta < d$. В силу равномерной сходимости на отрезке $[c, \eta]$ интеграла (54.17), согласно теореме 4, имеем

$$\int\limits_c^\eta dy \int\limits_a^b f(x, y)\, dx = \int\limits_a^b dx \int\limits_c^\eta f(x, y)\, dy. \tag{54.21}$$

Предел левой части этого равенства при $\eta \to d - 0$, очевидно, равен

$$\int\limits_c^d dy \int\limits_a^b f(x, y)\, dx.$$

Покажем, что предел правой части равенства (54.21) равен

$$\int\limits_a^b dx \int\limits_c^d f(x, y)\, dy,$$

т. е. что в этом случае возможен предельный переход при $\eta \to d - 0$ под знаком интеграла. Проверим выполнение предпосылок теоремы 2 этого пункта. Функция $\Phi(x, \eta) = \int\limits_c^\eta f(x, y)\, dy$ непрерывна по x (см. теорему 1 п. 53.1) и, согласно условию теоремы, на любом отрезке $[a, \xi]$, $a < \xi < b$, при $\eta \to d - 0$ равномерно стремится к интегралу (54.18), т. е. к функции $F(x) = \int\limits_c^d f(x, y)\, dy$.

Наконец, интеграл

$$\int_a^b \Phi(x, \eta)\,dx = \int_a^b dx \int_c^\eta f(x, y)\,dy$$

сходится равномерно относительно η, $c < \eta < d$, ибо

$$|\Phi(x, \eta)| \leqslant \int_c^d |f(x, y)|\,dy,$$

а интеграл (54.20) по предположению сходится.

Следовательно, условия теоремы 2 для правой части равенства (54.21) выполнены, поэтому

$$\lim_{\eta \to d-0} \int_a^b \Phi(x, \eta)\,dx = \int_a^d \lim_{\eta \to d-0} \Phi(x, \eta)\,dx = \int_a^b dx \int_c^d f(x, y)\,dy.$$

Итак, искомое равенство (54.19) получается из равенства (54.21) предельным переходом при $\eta \to d-0$.

Теорема доказана.

Перейдем теперь к рассмотрению дифференцируемости несобственных интегралов, зависящих от параметра.

Теорема 6. *Пусть функции $f(x, y)$ и $\frac{\partial f(x, y)}{\partial y}$ определены и непрерывны в полуоткрытом прямоугольнике*

$$\Delta = \{a \leqslant x < b,\ c \leqslant y \leqslant d\},$$
$$-\infty < a < b \leqslant +\infty,\quad -\infty < c < d < +\infty.$$

Если интеграл $\int_a^b f(x, y)\,dx$ сходится, а интеграл $\int_a^b \frac{\partial f(x, y)}{\partial y}\,dx$ равномерно сходится на отрезке $[c, d]$, то функция $\Phi(y) = \int_a^b f(x, y)\,dx$ непрерывно дифференцируема на этом отрезке и

$$\frac{d}{dy} \int_a^b f(x, y)\,dx = \int_a^b \frac{\partial f(x, y)}{\partial y}\,dx.$$

Доказательство. Представим функцию $\Phi(y) = \int_a^b f(x, y)\,dx$ в виде сходящегося на отрезке $[c, d]$ ряда

$$\Phi(y) = \int_a^b f(x, y)\,dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{\eta_n}^{\eta_{n+1}} f(x, y)\,dx, \tag{54.22}$$

где η_n, $n=1, 2, \ldots,$ — фиксированная последовательность, такая, что $\eta_n \in [a, b]$, $\eta_1 = a$ и $\lim\limits_{n\to\infty} \eta_n = b$, а функцию $\int\limits_a^b \frac{\partial f(x, y)}{\partial y}\, dx$ — в виде равномерно сходящегося на отрезке $[c, d]$ ряда

$$\int\limits_a^b \frac{\partial f(x, y)}{\partial y}\, dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int\limits_{\eta_n}^{\eta_{n+1}} \frac{\partial f(x, y)}{\partial y}\, dx. \tag{54.23}$$

Согласно теореме 4 п. 53.1, каждый член ряда (54.23) является производной по переменной y от соответствующего члена ряда (54.22), поэтому в силу теоремы о дифференцировании рядов (см п. 36.3) сумма ряда (54.23) является производной суммы ряда (54.22).

Теорема доказана.

Как уже отмечалось, все предыдущие формулировки и доказательства относятся к несобственным интегралам, зависящим от параметра, которые удовлетворяют условиям 1) и 2) сформулированным в начале п. 54.1. Совершенно аналогично рассматриваются и более общие случаи, например, когда:

1′) $-\infty \leqslant a < b \leqslant +\infty$;

2′) при любом $y \in Y$ функция $f(x, y)$ по переменной x интегрируема по Риману на каждом отрезке $[\xi, \eta]$, где $a < \xi < \eta < b$.

Построенная теория интегралов, зависящих от параметра, естественным образом переносится и на случай, когда интеграл зависит от двух или вообще от некоторого конечного числа параметров $y_1, \ldots, y_n$. При этом многие формулировки определений и теорем, а также доказательства формально остаются прежними, если только вкладывать новый смысл в применяемые обозначения. Это относится, например, к определению равномерной сходимости и теореме о предельном переходе под знаком интеграла, следует только считать, что $y = (y_1, \ldots, y_n)$ и $y_0 = (y_1^{(0)}, \ldots, y_n^{(0)})$ — точки n-мерного евклидова пространства, а $y \to y_0$ понимать в смысле предела в этом пространстве.

54.3. Применение теории интегралов, зависящих от параметра, к вычислению определенных интегралов

Среди различных применений теории интегралов, зависящих от параметра, рассмотрим на примерах ее применение к вычислению определенных интегралов.

Пример 1. Пусть требуется вычислить интеграл

$$J=\int_0^1 \frac{\operatorname{arctg} x}{x\sqrt{1-x^2}}\,dx. \tag{54.24}$$

Можно вычислить сначала неопределенный интеграл, а затем по формуле Ньютона — Лейбница и интеграл (54.24). Однако это требует довольно длинных выкладок. Мы приведем другие способы вычисления этого интеграла, основанные на замене данного интеграла некоторым интегралом, зависящим от параметра, для которого интеграл (54.24) является частным значением.

Рассмотрим функцию $f(x, y)=\dfrac{\operatorname{arctg} xy}{x\sqrt{1-x^2}}$ и интеграл

$$J(y)=\int_0^1 f(x, y)\,dx=\int_0^1 \frac{\operatorname{arctg} xy}{x\sqrt{1-x^2}}\,dx. \tag{54.25}$$

Очевидно, что интеграл (54.24) получается отсюда при $y=1$.

Так как $\dfrac{\operatorname{arctg} xy}{x\sqrt{1-x^2}}=O(1)$ при $x\to 0$ и $\dfrac{\operatorname{arctg} xy}{x\sqrt{1-x^2}}=O\left(\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right)$ при $x\to 1$ и любом фиксированном y, то интеграл (54.25) сходится при любом y.

Из неравенства

$$\left|\frac{\partial f(x, y)}{\partial y}\right|=\left|\frac{1}{(1+x^2y^2)\sqrt{1-x^2}}\right|\leqslant\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

и сходимости интеграла

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

следует, что интеграл

$$\int_0^1 \frac{\partial f(x, y)}{\partial y}\,dx \tag{54.26}$$

равномерно сходится на всей вещественной оси и, согласно теореме 6 п. 54.2, равен $J'(y)$.

Делая последовательно замену переменного $x=\cos\varphi$ и $t=\operatorname{tg}\varphi$, получим

$$J'(y)=\int_0^1 \frac{dx}{(1+x^2y^2)\sqrt{1-x^2}}=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{1+y^2\cos^2\varphi}=$$

$$= \int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+y^2+t^2} = \frac{1}{\sqrt{1+y^2}} \operatorname{arctg} \frac{t}{\sqrt{1+y^2}} \Big|_0^{+\infty} = \frac{\pi}{2\sqrt{1+y^2}}.$$

Теперь, по определению неопределенного интеграла,

$$J(y) = \int J'(y)\,dy = \frac{\pi}{2}\int \frac{dy}{\sqrt{1+y^2}} = \frac{\pi}{2}\ln\left(y+\sqrt{1+y^2}\right)+c.$$

Но из (54.25) следует, что $J(0)=0$, поэтому $c=0$ и

$$J(y) = \frac{\pi}{2}\ln\left(y+\sqrt{1+y^2}\right).$$

Отсюда получаем значение искомого интеграла (54.24):

$$J = J(1) = \frac{\pi}{2}\ln\left(1+\sqrt{2}\right).$$

Интеграл (54.24) можно вычислить и используя интегрирование по параметру. Замечая, что

$$\frac{\operatorname{arctg} x}{x} = \int_0^1 \frac{dy}{1+x^2y^2},$$

получим для интеграла J выражение

$$J = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \int_0^1 \frac{dy}{1+x^2y^2}. \tag{54.27}$$

Интеграл же

$$\int_0^1 \frac{dx}{(1+x^2y^2)\sqrt{1-x^2}}$$

сходится равномерно по y, ибо

$$\frac{1}{(1+x^2y^2)\sqrt{1-x^2}} \leqslant \frac{1}{\sqrt{1-x^2}},$$

и интеграл $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$ сходится, поэтому в интеграле (54.27) можно переменить порядок интегрирования (см. теорему 4 п. 54.2). Тогда (используя найденное выше значение получающегося интеграла) находим

$$J=\int_0^1 dy\int_0^1 \frac{dx}{(1+x^2y^2)\sqrt{1-x^2}}=\frac{\pi}{2}\int_0^1 \frac{dy}{\sqrt{1+y^2}}=\frac{\pi}{2}\ln(1+\sqrt{2}).$$

Пример 2. Вычислим значение интеграла

$$I(\alpha)=\int_0^{+\infty}\frac{\sin\alpha x}{x}\,dx. \tag{54.28}$$

Можно показать, что соответствующий неопределенный интеграл при $\alpha \neq 0$ не выражается через элементарные функции, и тем самым данный интеграл нельзя вычислить обычным приемом с помощью формулы Ньютона — Лейбница.

Интеграл (54.28) сходится при всех значениях α. Действительно, если $\alpha=0$, то, очевидно, $I(0)=0$. Если же $\alpha \neq 0$, то, производя замену переменного $t=\alpha x$, получим

$$I(\alpha)=\begin{cases}\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\sin t}{t}\,dt=I(1), & \text{если } \alpha>0.\\ \displaystyle-\int_0^{+\infty}\frac{\sin t}{t}\,dt=-I(1), & \text{если } \alpha<0.\end{cases}$$

Интеграл же $I(1)$ сходится (см. п. 34.4), поэтому и интеграл $I(\alpha)$ сходится.

Для того чтобы вычислить интеграл (54.28), рассмотрим интеграл более общего вида

$$I(\alpha,\beta)=\int_0^{+\infty}e^{-\beta x}\,\frac{\sin\alpha x}{x}\,dx.$$

Дифференцируя формально этот интеграл по α под знаком интеграла, получим интеграл

$$\int_0^{+\infty}e^{-\beta x}\cos\alpha x\,dx,$$

который при любом фиксированном $\beta>0$ равномерно сходится относительно параметра α, $-\infty<\alpha<+\infty$. Следовательно, при $\beta>0$ (см. т. I, п. 26.4)

$$\frac{\partial I(\alpha,\beta)}{\partial\alpha}=\int_0^{+\infty}e^{-\beta x}\cos\alpha x\,dx=\frac{\beta}{\alpha^2+\beta^2},$$

отсюда

$$I(\alpha, \beta) = \int_0^\alpha \frac{\beta d\alpha}{\alpha^2+\beta^2} + c(\beta) = \operatorname{arctg}\frac{\alpha}{\beta} + c(\beta).$$

Но $I(0, \beta) = 0$, следовательно, $c(\beta) = 0$.
Итак,

$$I(\alpha, \beta) = \operatorname{arctg}\frac{\alpha}{\beta}, \quad \beta > 0.$$

Нас, однако, интересует значение интеграла $I(\alpha, \beta)$ при $\beta = 0$. Проще всего попытаться обосновать возможность предельного перехода под знаком интеграла в интеграле $I(\alpha, \beta)$ при $\beta \to +0$.

Зафиксируем число $b \geqslant 0$ и покажем, что интеграл $I(\alpha, \beta)$ при любом фиксированном $\alpha \neq 0$ равномерно сходится по параметру β на отрезке $[0, b]$. Действительно, интегрируя по частям (см. там же, п. 26.4), получим

$$\int_\eta^{+\infty} e^{-\beta x}\frac{\sin\alpha x}{x}dx = \frac{1}{x}e^{-x\beta}\frac{\alpha\cos\alpha x + \beta\sin\alpha x}{\alpha^2+\beta^2}\bigg|_\eta^{+\infty} + $$
$$+ \int_\eta^{+\infty} e^{-\beta x}\frac{\alpha\cos\alpha x + \beta\sin\alpha x}{\alpha^2+\beta^2}\frac{dx}{x^2}.$$

Выберем η_ε так, чтобы при $\eta \geqslant \eta_\varepsilon$ выполнялись неравенства

$$\left|\frac{1}{\eta}e^{-\eta\beta}\frac{\alpha\cos\alpha\eta + \beta\sin\alpha\eta}{\alpha^2+\beta^2}\right| \leqslant \frac{\alpha+b}{\alpha^2}\frac{1}{\eta} < \frac{\varepsilon}{2},$$
$$\left|\int_\eta^{+\infty} e^{-\beta x}\frac{\alpha\cos\alpha x + \beta\sin x}{\alpha^2+\beta^2}\frac{dx}{x^2}\right| \leqslant \frac{\alpha+b}{\alpha^2}\int_\eta^{+\infty}\frac{dx}{x^2} < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Тогда при $\eta \geqslant \eta_\varepsilon$ получим

$$\left|\int_\eta^{+\infty} e^{-\beta x}\frac{\sin\alpha x}{x}dx\right| < \varepsilon,$$

что и доказывает равномерную сходимость интеграла $I(\alpha, \beta)$ по параметру β на любом отрезке $[0, b]$. Теперь в силу теоремы 2 п. 54.2

$$I(\alpha) = I(\alpha, 0) = \lim_{\beta\to+0} I(\alpha, \beta) = \lim_{\beta\to+0}\operatorname{arctg}\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\pi}{2}\operatorname{sign}\alpha.$$

Итак,

$$I(\alpha)=\int_0^{+\infty}\frac{\sin\alpha x}{x}\,dx=\begin{cases}\frac{\pi}{2}, & \text{если } \alpha>0,\\ 0, & \text{если } \alpha=0,\\ -\frac{\pi}{2}, & \text{если } \alpha<0\end{cases}$$

Знание этого интеграла позволяет легко находить и значение многих подобных интегралов. Например, легко можно показать (и это мы используем в дальнейшем), что

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1-\cos\alpha x}{x^2}\,dx=|\alpha|\pi. \qquad (54.29)$$

Действительно, интегрируя по частям, найдем

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1-\cos\alpha x}{x^2}\,dx=\alpha\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin\alpha x}{x}\,dx=2\alpha\int_0^{+\infty}\frac{\sin\alpha x}{x}\,dx=|\alpha|\pi.$$

54.4. Эйлеровы интегралы

Рассмотрим интегралы

$$\mathrm{B}(p, q)=\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}\,dx, \qquad (54.30)$$

$$\Gamma(s)=\int_0^{\infty} x^{s-1}e^{-x}\,dx, \qquad (54.31)$$

называемые *эйлеровыми интегралами* соответственно *первого и второго рода*. Интеграл (54.30) называется также *бета-функцией*, а интеграл (54.31) — *гамма-функцией*.

Выясним прежде всего, для каких значений параметров p, q и s имеют смысл формулы (54.30) и (54.31).

Рассмотрим сначала интеграл (54.30). Подынтегральная функция в этом интеграле имеет, вообще говоря, две особенности: пр $x=0$ и при $x=1$, поэтому представим его в виде

$$\mathrm{B}(p, q)=\int_0^{\frac{1}{2}} x^{p-1}(1-x)^{q-1}\,dx+\int_{\frac{1}{2}}^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}\,dx.$$

Сравнивая первый интеграл правой части с интегралом $\int\limits_0^{\frac{1}{2}} x^{p-1}dx$, а второй — с интегралом $\int\limits_{\frac{1}{2}}^{0}(1-x)^{q-1}dx$, которые сходятся соответственно при $p>0$ и $q>0$ и расходятся при $p\leqslant 0$ и $q\leqslant 0$ (см. п. 33.3), получаем, что областью определения бета-функции (54.30) в плоскости p, q является координатный прямой угол $p>0,\ q>0$.

Далее, интеграл $\mathrm{B}(p, q)$ равномерно сходится на каждом прямом угле $p\geqslant p_0,\ q\geqslant q_0$, каковы бы ни были $p_0>0$ и $q_0>0$. Действительно, это следует, согласно признаку Вейерштрасса (см. п. 54.1), из неравенства

$$x^{p-1}(1-x)^{q-1}\leqslant x^{p_0-1}(1-x)^{q_0-1},\quad 0\leqslant x\leqslant 1,$$

и доказанной выше сходимости интеграла

$$\mathrm{B}(p_0, q_0)=\int\limits_0^1 x^{p_0-1}(1-x)^{q_0-1}\,dx,\quad p_0>0,\quad q_0>0.$$

Поскольку всякая точка (p, q), $p>0$, $q>0$, принадлежит некоторому углу: $p>p_0$, $q>q_0$, при соответствующем выборе чисел $p_0>0$ и $q_0>0$, то отсюда в силу теоремы 3 п. 54.2 следует, что функция $\mathrm{B}(p, q)$ непрерывна во всей области своего определения.

Для отыскания области определения гамма-функции (54.31) представим ее в виде

$$\Gamma(s)=\int\limits_0^1 x^{s-1}e^{-x}\,dx+\int\limits_1^{+\infty} x^{s-1}e^{-x}\,dx. \tag{54.32}$$

Сравнивая первый интеграл правой части с интегралом $\int\limits_0^1 x^{s-1}dx$, который сходится при $s>0$ и расходится при $s\leqslant 0$, получаем, что он также сходится и расходится при тех же значениях параметра s. Что же касается второго интеграла правой части равенства (54.32), то он сходится при всех значениях s. Это, например, следует из того, что при любом s $x^{s-1}e^{-x}=o(e^{-\frac{x}{2}})$ при $x\to+\infty$, и из сходимости интеграла $\int\limits_1^{+\infty} e^{-\frac{x}{2}}dx$. Таким образом, интеграл (54.31) сходится для всех $s>0$ и расходится при $s\leqslant 0$.

Покажем теперь, что интеграл (54.31) равномерно сходится на всяком отрезке $[s_1, s_2]$, где $0<s_1<s_2<+\infty$. Действительно, пусть $s_1\leqslant s\leqslant s_2$, тогда, если $0\leqslant x\leqslant 1$, то

$$x^{s-1}e^{-x}\leqslant x^{s_1-1}e^{-x},$$

а если $x \geqslant 1$, то

$$x^{s-1} e^{-x} \leqslant x^{s_2-1} e^{-x}$$

и так как интегралы

$$\int_0^1 x^{s_1-1} e^{-x}\,dx \quad \text{и} \quad \int_1^{+\infty} x^{s_2-1} e^{-x}\,dx$$

сходятся, то из формулы (54.32) по признаку Вейерштрасса равномерной сходимости интегралов (см. п. 54.1) получаем равномерную сходимость интеграла $\Gamma(s)$ на отрезке $[s_1, s_2]$. Отсюда в силу теоремы 3 п. 54.2 следует, что функция $\Gamma(s)$ непрерывна во всей области своего определения.

Упражнение 2. Доказать, что функции $B(p, q)$ и $\Gamma(s)$ бесконечно дифференцируемы.

Задача 23. Доказать, что функции $B(p, q)$ и $\Gamma(s)$ аналитические.

Отметим некоторые свойства интегралов $\Gamma(s)$ и $B(p, q)$. Прежде всего, из формулы (54.31) непосредственно получаем

$$\Gamma(s) > 0 \quad (s > 0), \tag{54.33}$$

в частности, гамма-функция не имеет нулей. Далее, интегрируя по частям, получим

$$\Gamma(s+1) = \int_0^{\infty} x^s e^{-x}\,dx = -x^s e^{-x} \Big|_0^{+\infty} + s\int_0^{+\infty} x^{s-1} e^{-x}\,dx = s\Gamma(s). \tag{54.34}$$

Таким образом, если $s > n$ $(n = 1, 2, \ldots)$, то

$$\Gamma(s) = (s-1)(s-2)\ldots(s-n)\Gamma(s-n), \tag{54.35}$$

и при любом $s > 0$ всегда можно выбрать число n так, чтобы $0 < s - n \leqslant 1$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$, и тогда значение $\Gamma(s)$ с помощью формулы (54.35) будет выражаться через значение гамма-функции в некоторой точке промежутка $(0, 1]$. Иначе говоря, зная значение гамма-функции на промежутке $(0, 1]$, можно найти ее значение в любой точке.

Заметим еще, что $\Gamma(1) = 1$ и, следовательно, в силу формулы (54.35)

$$\Gamma(n+1) = n!,$$

тем самым гамма-функция $\Gamma(s+1)$ является продолжением функции $s!$, определенной только для целых $s = 0, 1, 2, \ldots$, на всю полуось $s > -1$ вещественных чисел.

Из свойств бета-функции $B(p, q)$ отметим следующие.

1. Для любых $p > 0$ и $q > 0$

$$B(p, q) = B(q, p). \tag{54.36}$$

Чтобы в этом убедиться, достаточно в интеграле (54.30) сделать замену переменного $t = 1 - x$.

2. Для любых $p > 0$ и $q > 1$

$$B(p, q) = \frac{q-1}{p+q-1} B(p, q-1). \tag{54.37}$$

Аналогично, в силу симметрии (см. (54.36)), для любых $q > 0$ и $p > 1$

$$B(p, q) = \frac{p-1}{p+q-1} B(p-1, q). \tag{54.38}$$

Действительно, интегрируя по частям (54.30) и замечая, что $x^p(1-x)^{q-2} = x^{p-1}(1-x)^{q-2} - x^{p-1}(1-x)^{q-1}$, получим

$$B(p, q) = \int_0^1 (1-x)^{q-1}\, d\frac{x^p}{p} = \frac{x^p(1-x)^{q-1}}{p}\Big|_0^1 +$$

$$+ \frac{q-1}{p}\int_0^1 x^p(1-x)^{q-2}\, dx = \frac{q-1}{p}\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-2}\, dx -$$

$$- \frac{q-1}{p}\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1} dx = \frac{q-1}{p} B(p, q-1) - \frac{q-1}{p} B(p, q),$$

откуда следует (54.37), а в силу симметрии и (54.38).

3. Для любых $p > 0$

$$B(p, n) = B(n, p) = \frac{1\cdot 2\cdot 3\ldots(n-1)}{p(p+1)\ldots(p+n-1)}, \quad n = 1, 2, \ldots .$$

Эта формула получается последовательным применением формулы (54.37), если только заметить, что

$$B(p, 1) = \int_0^1 x^{p-1}\, dx = \frac{1}{p}.$$

Если же и $p = m$ — натуральное число, то

$$B(m, n) = \frac{(n-1)!\,(m-1)!}{(m+n-1)!}.$$

Между функциями $\mathrm{B}(p, q)$ и $\Gamma(s)$ существует связь, которая устанавливается формулой

$$\mathrm{B}(p, q)=\frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}, \quad p>0, \ q>0. \tag{54.39}$$

Докажем эту формулу, следуя методу Эйлера. Сделаем в формуле (54.31) замену переменного $x=(1+t)y$, $t>0$:

$$\frac{\Gamma(s)}{(1+t)^s}=\int_0^{+\infty} y^{s-1}e^{-(1+t)y}\,dy$$

и положим $s=p+q$, $p>0$, $q>0$, тогда

$$\frac{\Gamma(p+q)}{(1+t)^{p+q}}=\int_0^{+\infty} y^{p+q-1}e^{-(1+t)y}\,dy.$$

Помножим обе части этого равенства на t^{p-1} и проинтегрируем по t от 0 до $+\infty$:

$$\Gamma(p+q)\int_0^{+\infty}\frac{t^{p-1}}{(1+t)^{p+q}}\,dt=$$
$$=\int_0^{+\infty} t^{p-1}\,dt\int_0^{+\infty} y^{p+q-1}e^{-(1+t)y}\,dy. \tag{54.40}$$

В интеграле, стоящем в левой части этого равенства, сделаем замену переменного $t=\frac{x}{1-x}$:

$$\int_0^{+\infty}\frac{t^{p-1}}{(1+t)^{p+q}}\,dt=\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}\,dx=\mathrm{B}(p, q). \tag{54.41}$$

Для вычисления правой части равенства заметим, что

$$\int_0^{+\infty} t^{p-1}\,dt\int_0^{+\infty} y^{p+q-1}e^{-(1+t)y}\,dy=$$
$$=\lim_{\xi\to+0}\int_0^{+\infty} t^{p-1}\,dt\int_\xi^{+\infty} y^{p+q-1}e^{-(1+t)y}\,dy. \tag{54.42}$$

Действительно, обозначая

$$\Phi(t, \xi)=\int_\xi^{+\infty} y^{p+q-1}e^{-(1+t)y}\,dy,$$

из оценки

$$0 \leqslant \Phi(t, 0) - \Phi(t, \xi) \leqslant \int_0^{\xi} y^{p+q-1} e^{-y}\, dy,$$

$$\int_0^{\infty} t^{p-1} \Phi(t, \xi)\, dt \leqslant \int_0^{\infty} t^{p-1} \Phi(t, 0) dt$$

заключаем, что при $\xi \to +0$ функция $\Phi(t, \xi)$ стремится к $\Phi(t, 0)$ равномерно относительно $t \in (0, +\infty)$ и что интеграл $\int_0^{\infty} t^{p-1}\Phi(t, \xi)\, dt$ равномерно сходится относительно ξ, ибо сходится интеграл (54.40). Следовательно, в левой части (54.42) можно перейти к пределу под знаком интеграла.

Далее,

$$\int_0^{+\infty} t^{p-1}\, dt \int_{\xi}^{+\infty} y^{p+q-1} e^{-(1+t)y}\, dy =$$

$$= \int_{\xi}^{+\infty} y^{p+q-1} e^{-y}\, dy \int_0^{+\infty} t^{p-1} e^{-ty}\, dy, \quad \xi > 0, \ p \geqslant 1, \ q \geqslant 1. \quad (54.43)$$

Перестановка порядка интегрирования здесь возможна в силу того, что, во-первых, интеграл $t^{p-1} \int_{\xi}^{+\infty} y^{p+q-1} e^{-(1+t)y}\, dy$ равномерно сходится по t на любом отрезке $[0, a]$, что следует из равномерной оценки подынтегральной функции

$$t^{p-1} y^{p+q-1} e^{-(1+t)y} \leqslant a^{p-1} y^{p+q-1} e^{-y}, \quad 0 \leqslant t \leqslant a,$$

и сходимости интеграла $\int_{\xi}^{+\infty} y^{p+q-1} e^{-y}\, dy$; во-вторых, интеграл

$$y^{p+q-1} e^{-y} \int_0^{+\infty} t^{p-1} e^{-ty}\, dt$$

равномерно сходится по y на любом отрезке $[\xi, b]$, $\xi > 0$, что следует из равномерной оценки подынтегральной функции

$$y^{(p+q-1)} e^{-y} t^{p-1} e^{-ty} \leqslant b^{p+q-1} t^{p-1} e^{-\xi t}$$

и сходимости интеграла

$$\int_0^{+\infty} t^{p-1} e^{-\xi t}\, dt;$$

в-третьих, интеграл, стоящий в правой части равенства (54.43), существует: делая замену переменного $ty = u$, получим

$$\int\limits_{\xi}^{+\infty} y^{p+q-1} e^{-y}\, dy \int\limits_{0}^{+\infty} t^{p-1} e^{-t}\, dt =$$

$$= \Gamma(p) \int\limits_{\xi}^{+\infty} y^{q-1} e^{-y}\, dy. \tag{54.44}$$

Таким образом, перестановка порядка интегрирования в (54.43) следует из теоремы 5 п. 54.2 (отметим, что здесь подынтегральная функция не отрицательна).

Наконец,

$$\lim_{\xi \to +0} \int\limits_{\xi}^{+\infty} y^{q-1} e^{-y}\, dy = \Gamma(q). \tag{54.45}$$

Из формул (54.40) — (54.45) получаем формулу (54.39) для $p \geqslant 1$, $q \geqslant 1$.

Если теперь $p > 0$ и $q > 0$, то по доказанному

$$\mathrm{B}(p+1,\ q+1) = \frac{\Gamma(p+1)\,\Gamma(q+1)}{\Gamma(p+q+2)}.$$

Применяя формулы (54.34), (54.37) и (54.38), мы получим формулу (54.39) в предположении $p > 0$, $q > 0$.

54.5. Замечания о кратных интегралах, зависящих от параметра

Мы рассмотрели выше «одномерные» интегралы, зависящие от параметра, т. е. случай, когда и переменная интегрирования и параметр являлись числовыми переменными. Эта теория без особого труда обобщается и на кратные интегралы, зависящие от «многомерного» параметра, т. е. на интегралы вида

$$F(y) = \int f(x, y)\, dG. \tag{54.46}$$

Здесь функция $f(x, y)$ определена на открытом множестве $G \subset E^n$ и интегрируема по Риману на любом кубируемом множестве Γ, таком, что $\overline{\Gamma} \subset G$, а параметр y пробегает некоторое множество Y, которое может быть, например, подмножеством m-мерного пространства E^m, а интеграл (54.46) понимается, вообще говоря, в несобственном смысле.

Интеграл (54.46) называется *сходящимся*, если при каждом фиксированном $y_0 \in Y$ интеграл

$$\int f(x, y_0)\, dG$$

сходится. В случае $n \geqslant 2$, это, как известно (см. п. 48.3), эквивалентно условию, что сходится интеграл

$$\int |f(x, y_0)|\, dG.$$

Сходящемуся интегралу (54.46) (и любой последовательности кубируемых множеств G_k, $k = 1, 2, \ldots$, монотонно исчерпывающей множество G) естественным образом сопоставляется ряд, суммой которого он является:

$$\int f(x, y)\, dG = \\ = \int f(x, y)\, dG_1 + \sum_{k=1}^{\infty} \int f(x, y)\, d(G_{k+1} \setminus \overline{G}_k). \qquad (54.47)$$

Подобно одномерному случаю определяется и равномерно сходящийся интеграл: сходящийся интеграл (54.46) называется *равномерно сходящимся*, если, какова бы ни была монотонно исчерпывающая открытое множество G последовательность кубируемых множеств G_k, $k = 1, 2, \ldots$, и каково бы ни было число $\varepsilon > 0$, существует номер k_ε, зависящий от данной последовательности и числа ε, такой, что для каждого номера $k \geqslant k_\varepsilon$ и всех $y \in Y$ справедливо неравенство

$$\left| \int f(x, y)\, d(G \setminus \overline{G}_k) \right| < \varepsilon.$$

Если интеграл (54.46) равномерно сходится на множестве G относительно параметра $y \in Y$, то ряд (54.47) также равномерно сходится на G.

Для кратных интегралов, зависящих от параметра, остаются в силе теоремы об их непрерывности, дифференцируемости и интегрируемости, аналогичные доказанным выше. В этом легко убедиться, и мы не будем на этом подробно останавливаться.

Встречаются интегралы, зависящие от параметра и более сложного вида, у которых не только подынтегральная функция f, но и множество G, по которому происходит интегрирование, зависит от параметра $G = G(y)$:

$$F(y) = \int f(x, y)\, dG(y). \qquad (54.48)$$

Примером такого интеграла в одномерном случае является интеграл

$$F(y)=\int_a^b \frac{dx}{|x-y|^\alpha}, \quad a \leqslant y \leqslant b.$$

Здесь $G(y)$ состоит из двух (кроме случая $y=a$ и $y=b$) интервалов (a, y) и (y, b), меняющихся с изменением параметра y.

Рассмотрим аналогичный пример в n-мерном пространстве. Пусть G — открытое множество в E^n, функция $\mu=\mu(x)$ непрерывна в G, $\rho=\rho(x, y)$, $x \in G$, $y \in E^n$ и α — некоторое число. Интеграл

$$u(y)=\int \frac{\mu(x)\, dG}{\rho^\alpha} \tag{54.49}$$

называется *интегралом типа потенциала* и является интегралом типа (54.48), так как в нем множеством, по которому производится интегрирование, является множество $G \setminus \{y\}$, зависящее от y (в формуле (54.49) мы обозначали, как это обычно пишется, множество, по которому производится интегрирование, просто через G). Если $\alpha=1$ и $n=3$, то функция (54.49) называется *ньютоновым потенциалом*.

Задача 24. Доказать, что если G — кубируемое множество и если функция $\mu=\mu(x)$ непрерывна на $\overline{G}$, то интеграл (54.49) при $\alpha<n$ непрерывен на всем пространстве.

ГЛАВА СЕДЬМАЯ

РЯДЫ ФУРЬЕ. ИНТЕГРАЛ ФУРЬЕ

§ 55. КЛАССИЧЕСКИЕ РЯДЫ ФУРЬЕ

55.1. Определение ряда Фурье. Описание основных задач

Определение 1. *Ряд вида*

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx \tag{55.1}$$

называется тригонометрическим рядом.

Частичные суммы тригонометрического ряда являются линейными комбинациями функций из системы

$$1,\ \cos x,\ \sin x,\ \cos 2x,\ \sin 2x,\ \ldots,\ \cos nx,\ \sin nx,\ \ldots \tag{55.2}$$

Определение 2. *Система функций* (55.2) *называется тригонометрической системой.*

Лемма. *Тригонометрическая система* (55.2) *имеет следующие свойства:*

1) *интеграл по отрезку* $[-\pi, \pi]$ *от произведения двух различных функций этой системы равен нулю (это свойство называется свойством ортогональности* *) *системы* (55.2)), *т. е.*

$$\left.\begin{aligned} &\int_{-\pi}^{\pi}\cos nx \cos mx\, dx = 0,\ n\neq m,\\ &\int_{-\pi}^{\pi}\sin nx \sin mx\, dx = 0,\ n\neq m,\\ &\int_{-\pi}^{\pi}\cos nx \sin mx\, dx = 0,\\ &m,\ n=0,\ 1,\ 2,\ \ldots; \end{aligned}\right\} \tag{55.3}$$

*) Происхождение термина «ортогональность» будет разъяснено в п. 58.3.

$$2)\quad \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 nx\,dx = \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 nx\,dx = \pi, \qquad n = 1, 2, \ldots . \qquad (55.4)$$

Доказательство. Например, имеем

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \sin mx\,dx = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} [\cos(n-m)x - \cos(n+m)x]\,dx =$$

$$= \frac{\sin(n-m)x}{2(n-m)}\Big|_{-\pi}^{\pi} - \frac{\sin(n+m)}{2(n+m)}x\Big|_{-\pi}^{\pi} = 0.$$

Аналогично доказываются и два других равенства (55.3).

Докажем теперь (55.4):

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 nx\,dx = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} (1 + \cos 2nx)\,dx = \pi,$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 nx\,dx = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} (1 - \cos 2nx)\,dx = \pi.$$

Лемма доказана.

Теорема 1. *Пусть*

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx \qquad (55.5)$$

и ряд, стоящий в правой части этого равенства, сходится равномерно на отрезке $[-\pi, \pi]$, *тогда*

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx,$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx, \quad b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx, \; n=1, 2, \ldots . \qquad (55.6)$$

Доказательство. Поскольку ряд, стоящий в правой части равенства (55.5), сходится равномерно на отрезке $[-\pi, \pi]$, а его члены являются непрерывными функциями на этом отрезке, то и сумма ряда $f(x)$ непрерывна на отрезке $[-\pi, \pi]$, а сам ряд можно почленно интегрировать (см. п. 36.3) от $-\pi$ до π:

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = \int_{-\pi}^{\pi} \left(\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx\right)dx =$$

$$= \frac{a_0}{2}\int_{-\pi}^{\pi} dx + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx\,dx + b_n \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx\,dx = \pi a_0.$$

Отсюда следует первая из формул (55.6).

Если ряд (55.5) почленно помножить на $\cos nx$ и $\sin nx$ ($n = 1, 2, \ldots$), то полученные ряды будут снова равномерно сходиться на отрезке $[-\pi, \pi]$ (это легко проверить, например, с помощью критерия Коши равномерной сходимости рядов, см. п. 36.2, заметив, что $|\sin nx| \leqslant 1$ и $|\cos nx| \leqslant 1$). Интегрируя почленно полученные так ряды и используя свойство ортогональности (55.3) тригонометрической системы и равенства (53.4), будем иметь

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx\, dx = \int_{-\pi}^{\pi} a_n \cos^2 nx\, dx = \pi a_n,$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx\, dx = \int_{-\pi}^{\pi} b_n \sin^2 nx\, dx = \pi b_n.$$

Формулы (55.6), а следовательно, и теорема доказаны.

Теперь заметим, что интегралы (55.6) имеют смысл не только для функций непрерывных на отрезке $[-\pi, \pi]$, а также, например, и для функций, абсолютно интегрируемых на этом отрезке. Напомним, что понятие абсолютно сходящегося интеграла (как и просто сходящегося интеграла) было введено только для таких функций, определенных на некотором интервале (a, b), $-\infty \leqslant a < b \leqslant +\infty$, для которых существует конечное число точек x_i, $i = 0, 1, 2, \ldots, k$: $a_0 = x_0 < x_1 < \ldots < x_i < \ldots < x_k = b$, таких, что функция f интегрируема по Риману на любом отрезке $[\xi_i, \eta_i]$, где $x_{i-1} < \xi_i < \eta_i < x_i$. При этих предположениях, если интеграл $\int_a^b |f(x)|\, dx$ сходится, то всегда имеет смысл и сходится интеграл $\int_a^b f(x)\, dx$ (см. п. 33.4 и 34.4). Точки x_i, $i = 0, 1, \ldots, k$, будем называть особыми.

Если интеграл от функции f абсолютно сходится на отрезке $[-\pi, \pi]$, то для нее все интегралы (55.6) также сходятся.

Действительно, пусть для определенности функция f имеет единственную особую точку $x = \pi$ и, следовательно, интегрируема на любом отрезке $[-\pi, \pi - \delta]$, $\delta > 0$, тогда и функции $f(x) \cos nx$ и $f(x) \sin nx$, как произведение интегрируемых функций (см. п. 28.1), также интегрируемы на отрезке $[-\pi, \pi - \delta]$. Далее, из очевидных неравенств $|f(x) \cos nx| \leqslant |f(x)|$ и $|f(x) \sin nx| \leqslant |f(x)|$ и сходимости интеграла $\int_{\pi}^{+\pi} |f(x)|\, dx$ следует абсолютная сходимость всех интегралов (55.6).

Определение 3. *Пусть функция f абсолютно интегрируема на отрезке $[-\pi, \pi]$. Тригонометрический ряд (55.1), коэффициенты*

которого задаются формулами (55.6), называется рядом Фурье)*, *или классическим рядом Фурье, а числа a_n и b_n — коэффициентами Фурье функции f.*

В этом случае пишут

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx.$$

Частичные суммы порядка n этого ряда будем обозначать $S_n(x, f)$.

Упражнение 1. Пусть функция f абсолютно интегрируема на отрезке $[-\pi, \pi]$ и $f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx$. Тогда, если функция f четная, то $b_n = 0$, $n = 1, 2, \ldots$, если же f — нечетная функция, то $a_n = 0$, $n = 1, 2, \ldots$.

В § 58 мы обобщим понятие классического ряда Фурье, а именно определим и изучим ряды Фурье по произвольной ортогональной системе функций. В настоящем же параграфе будем изучать лишь классические ряды Фурье абсолютно интегрируемых функций (см. также п. 58.5).

Прежде всего будет рассматриваться вопрос об условиях, которые гарантируют сходимость ряда Фурье. В случае же сходимости ряда Фурье будет выясняться, чему равна его сумма, в частности, при каких условиях она совпадает с функцией, ряд Фурье которой рассматривается. Будет изучаться «скорость» сходимости рядов Фурье и условий, от которых она зависит. Будет показано, что и в том случае, когда ряд Фурье непрерывной функции расходится, в некоторых точках (примеры таких рядов существуют) по нему можно восстановить саму функцию. Наконец, будет видно, что с определенной точки зрения понятие сходимости рядов Фурье естественно рассматривать не только в обычном смысле (в смысле сходимости последовательности частичных сумм в точке и равномерной сходимости), но и в совершенно другом смысле, в смысле среднего квадратичного (см. п. 55.7, 55.8 и 58.5).

55.2. Стремление коэффициентов Фурье к нулю

Докажем замечательный факт стремления к нулю коэффициентов Фурье для абсолютно интегрируемых функций; докажем даже несколько более общее утверждение, полезное нам для дальнейшего.

Теорема 2. *Если функция f абсолютно интегрируема на промежутке (a, b), конечном или бесконечном, то*

$$\lim_{\nu \to \infty} \int_a^b f(x) \cos \nu x \, dx = \lim_{\nu \to \infty} \int_a^b f(x) \sin \nu x \, dx = 0.$$

*) Ж. Фурье (1768—1830) — французский физик и математик.

Следствие. *Коэффициенты Фурье* (55.6) *абсолютно интегрируемой функции стремятся к нулю при* $n \to \infty$.

Сначала покажем, что утверждение теоремы выполняется для более простого класса функций, а именно для так называемых ступенчатых функций; потом предельным переходом докажем справедливость теоремы в общем случае.

Определение 4. *Функция f, определенная на всей оси, называется ступенчатой, если существует отрезок $[a, b]$ и его разбиение $\tau = \{x_i\}_{i=1}^{i=k}$ такое, что функция f постоянна на каждом из промежутков $[x_{i-1}, x_i)$, $i = 1, 2, \ldots, k$, и равна нулю вне промежутка $[a, b)$:*

$$f(x) = c_i,\ x_{i-1} \leqslant x < x_i,\ i = 1,\ 2, \ldots,\ k,\ (c_i \text{— постоянная}),$$

$$f(x) = 0 \text{ при } x < a \text{ и } x \geqslant b.$$

Если $k = 1$, т. е. разбиение τ состоит из одного отрезка, то ступенчатая функция называется одноступенчатой. Каждая ступенчатая функция является линейной комбинацией одноступенчатых функций, принимающих значения только 0 и 1. Действительно, если положить

$$f_i(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x_{i-1} \leqslant x < x_i, \\ 0 & \text{для остальных } x, \end{cases} \quad i = 1,\ 2, \ldots,\ k,$$

то

$$f(x) = c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x) + \ldots + c_k f_k(x).$$

Ступенчатая функция f интегрируема на всей оси и

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx = \sum_{i=1}^{k} \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)\,dx = \sum_{i=1}^{k} c_i \Delta x_i,$$

$$\Delta x_i = x_i - x_{i-1},\ i = 1,\ 2, \ldots,\ k.$$

Лемма. *Для любой функции f, абсолютно интегрируемой на интервале (a, b), конечном или бесконечном, существует последовательность таких ступенчатых функций φ_n, что*

$$\lim_{n \to \infty} \int_a^b |f(x) - \varphi_n(x)|\,dx = 0. \tag{55.7}$$

Доказательство. Пусть функция f абсолютно интегрируема на промежутке с концами a и b и пусть для определенности она интегрируема на любом отрезке

$$[\xi, \eta],\ -\infty \leqslant a < \xi < \eta < b \leqslant +\infty.$$

Тогда, согласно определению несобственного интеграла, для любого фиксированного числа $\varepsilon > 0$ существуют такие числа ξ и η, что

$$\int_a^{\xi} |f(x)|\,dx + \int_{\eta}^{b} |f(x)|\,dx < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{55.8}$$

Функция f интегрируема по Риману на отрезке $[\xi, \eta]$, и, следовательно, если обозначить через s_τ нижнюю сумму Дарбу функции f, соответствующую разбиению τ отрезка $[\xi, \eta]$, то

$$\lim_{\delta_\tau \to 0} s_\tau = \int_{\xi}^{\eta} f(x)\,dx.$$

Поэтому существует разбиение $\tau_0 = \{x_i\}_{i=1}^{i=k}$ отрезка $[\xi, \eta]$, такое, что

$$0 \leqslant \int_{\xi}^{\eta} f(x)\,dx - s_{\tau_0} < \frac{\varepsilon}{2},$$

где

$$s_{\tau_0} = \sum_{i=1}^{k} m_i \Delta x_i, \quad m_i = \inf_{x_{i-1} \leqslant x < x_i} f(x), \quad \Delta x_i = x_i - x_{i-1}, \quad i = 1, 2, \ldots, k.$$

Положим

$$\varphi(x) = \begin{cases} m_i, & \text{если } x_{i-1} \leqslant x < x_i, \ i = 1, 2, \ldots, k, \\ 0, & \text{если } x < \xi \text{ или } x \geqslant \eta, \end{cases}$$

$\varphi(x)$ — ступенчатая функция и

$$\int_{\xi}^{\eta} \varphi(x)\,dx = \sum_{i=1}^{k} m_i \Delta x_i = s_{\tau_0}.$$

Следовательно,

$$0 \leqslant \int_{\xi}^{\eta} f(x)\,dx - \int_{\xi}^{\eta} \varphi(x)\,dx < \frac{\varepsilon}{2}, \tag{55.9}$$

при этом поскольку $\varphi(x) \leqslant f(x)$, $\xi \leqslant x < \eta$, то

$$|f(x) - \varphi(x)| = f(x) - \varphi(x).$$

Из неравенств (55.8) и (55.9) имеем:

$$\int_a^b |f(x) - \varphi(x)|\,dx = \int_a^{\xi} |f(x)|\,dx + \int_{\xi}^{\eta} [f(x) - \varphi(x)]\,dx + \int_{\eta}^{b} |f(x)|\,dx < \varepsilon.$$

Полагая, например, $\varepsilon = \frac{1}{n}$ и обозначая соответствующие ступенчатые функции φ через φ_n, $n = 1, 2, \ldots$, получим последовательность ступенчатых функций φ_n, для которой выполняется условие (55.7).

Лемма доказана.

Доказательство теоремы. Для всякой одноступенчатой функции $\varphi(x)$, равной 1 на полуинтервале $[\xi, \eta)$ и нулю вне его, очевидно, имеем

$$\lim_{\nu \to \infty} \int_a^b \varphi(x) \sin \nu x \, dx = \lim_{\nu \to \infty} \int_\xi^\eta \sin \nu x \, dx =$$
$$= \lim_{\nu \to \infty} \frac{\cos \nu\xi - \cos \nu\eta}{\nu} = 0.$$

Так как любая ступенчатая функция является линейной комбинацией одноступенчатых функций указанного вида, то утверждение теоремы верно и для любой ступенчатой функции.

Если теперь функция f является абсолютно интегрируемой на промежутке с концами a и b, $-\infty \leqslant a < b \leqslant +\infty$, то для любого числа $\varepsilon > 0$, согласно лемме, существует ступенчатая функция φ, такая, что

$$\int_a^b |f(x) - \varphi(x)| \, dx < \frac{\varepsilon}{2}.$$

С другой стороны, существует такое ν_ε, что при $\nu \geqslant \nu_\varepsilon$

$$\left| \int_a^b \varphi(x) \sin \nu x \, dx \right| < \frac{\varepsilon}{2};$$

тогда при $\nu \geqslant \nu_\varepsilon$ имеем также

$$\left| \int_a^b f(x) \sin \nu x \, dx \right| \leqslant \int_a^b |f(x) - \varphi(x)| \, dx + \left| \int_a^b \varphi(x) \sin \nu x \, dx \right| < \varepsilon,$$

что и означает, что

$$\lim_{\nu \to \infty} \int_a^b f(x) \sin \nu x \, dx = 0.$$

Аналогично доказывается, что

$$\lim_{\nu \to \infty} \int_a^b f(x) \cos \nu x \, dx = 0.$$

Теорема доказана.

З а м е ч а н и е. *Для любой непрерывной на отрезке $[a, b]$ функции f существует последовательность таких ступенчатых функций φ_n, что*

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b [f(x)-\varphi_n(x)]^2\,dx = 0.$$

Это легко доказывается методом, похожим на тот, которым была доказана лемма. Действительно, пусть $\tau = \{x_i\}_{i=1}^{i=k}$ — некоторое разбиение отрезка $[a, b]$, $m_i = \inf\limits_{x_{i-1}\leqslant x\leqslant x_i} f(x)$,

$$\varphi_\tau(x) = \begin{cases} m_i, & \text{если } x_{i-1} \leqslant x < x_i,\ i = 1, 2, \dots, k, \\ 0, & \text{если } x < a \text{ или } x \geqslant b, \end{cases}$$

и $\omega(\delta; f)$ — модуль непрерывности функции f. Очевидно,

$$0 \leqslant f(x) - \varphi_\tau(x) \leqslant \omega(\delta_\tau; f),$$

поэтому

$$\int_a^b |f(x)-\varphi_\tau(x)|^2\,dx \leqslant \omega^2(\delta_\tau; f)(b-a)$$

и, следовательно,

$$\lim_{\delta_\tau\to 0}\int_a^b |f(x)-\varphi_\tau(x)|^2\,dx = 0.$$

Это утверждение легко обобщается на случай, когда функция f непрерывна на конечном или бесконечном интервале (a, b) и интегрируема на нем в квадрате в несобственном смысле.

Определение 5. *Пусть функции f и f_n определены на некотором промежутке, конечном или бесконечном, с концами a и b. Если*

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b [f(x)-f_n(x)]^2\,dx = 0,$$

то говорится, что последовательность функций $\{f_n\}$ сходится в смысле среднего квадратичного на указанном промежутке к функции f.

Теперь утверждение, сформулированное в замечании, можно перефразировать следующим образом.

Всякая непрерывная на отрезке функция является пределом в смысле среднего квадратичного последовательности ступенчатых функций.

Упражнение 2. Доказать, что если последовательность интегрируемых на отрезке функций равномерно сходится к некоторой функции, то эта последовательность сходится к той же функции на указанном отрезке и в смысле среднего квадратичного.

55.3. Интеграл Дирихле. Принцип локализации

Найдем удобное для исследований выражение частичной суммы $S_n(x; f)$ ряда Фурье, функции f, называемой также просто *суммой Фурье n-го порядка, $n = 0, 1, 2, \ldots$, этой функции*. Подставляя в $S_n(x; f)$ выражения для коэффициентов Фурье (55.6), получаем

$$S_n(x;\ f) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} a_k \cos kx + b_k \sin kx =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\, dt + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) (\cos kt \cos kx + \sin kt \sin kx)\, dt =$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \left[\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} \cos k(t-x) \right] dt. \qquad (55.10)$$

Замечая, что

$$\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} \cos k\alpha =$$

$$= \frac{1}{2 \sin \frac{\alpha}{2}} \left\{ \sin \frac{\alpha}{2} + \sum_{k=1}^{n} \left[\sin (2k+1) \frac{\alpha}{2} - \sin (2k-1) \frac{\alpha}{2} \right] \right\} =$$

$$= \frac{\sin (2n+1) \frac{\alpha}{2}}{2 \sin \frac{\alpha}{2}},$$

имеем из (55.10)

$$S_n(x;\ f) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \frac{\sin (2n+1) \frac{t-x}{2}}{\sin \frac{t-x}{2}}\, dt. \qquad (55.11)$$

Нас интересует, в частности, предел частичных сумм $S_n(x; f)$ ряда Фурье. Заметим, что непосредственно перейти к пределу при $n \to \infty$ в равенстве (55.11), т. е. перейти к пределу под знаком интеграла в указанном равенстве, нельзя.

Интеграл, стоящий в правой части этого равенства, называется *интегралом Дирихле*, а функция

$$D_n(u) = 1 + 2\sum_{k=1}^{n} \cos ku = \frac{\sin(2n+1)\frac{u}{2}}{\sin\frac{u}{2}} \tag{55.12}$$

— *ядром Дирихле*. (Последнее равенство справедливо при $u \neq 0$). Из средней части формулы (55.12) имеем $D_n(0) = 2n + 1$. Ядро Дирихле непрерывно на всей вещественной оси.

Продолжим функцию f с полуинтервала $[-\pi, \pi)$ периодически на всю вещественную ось. Это, правда, может привести (в случае, когда определена в точке π и $f(-\pi) \neq f(\pi)$) к изменению значения функции в одной точке $x = \pi$, однако, поскольку коэффициенты Фурье функции определяются с помощью интегралов (55.6), то это не приведет к их изменению, и, следовательно, ряды Фурье данной и продолженной функции совпадают. Отметим, что при таком периодическом продолжении непрерывность функции f, если она была непрерывна, вообще говоря, нарушается. Продолженная функция будет непрерывной, если данная функция f непрерывна на отрезке $[-\pi, \pi]$ и $f(-\pi) = f(\pi)$. Ядро Дирихле $D_n(u)$ является периодической функцией от t с периодом 2π, что видно из формулы (55.12).

Сделаем в интеграле Дирихле (55.11) замену переменного $u = t - x$:

$$S_n(x;\ f) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} D_n(t-x) f(t)\,dt =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi-x}^{\pi-x} D_n(u) f(x+u)\,du = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} D_n(u) f(x+u)\,du. \tag{55.13}$$

Из формулы (55.12) непосредственно видно, что

$$D_n(-u) = D_n(u), \tag{55.14}$$

т. е. ядро Дирихле — четная функция.

Разобьем интеграл (55.13) на два интеграла, как это показано ниже, сделаем в первом интеграле замену переменного $u = -t$ и воспользуемся четностью ядра Дирихле, тогда будем иметь

$$S_n(x;\ f) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} D_n(u) f(x+u)\,du =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{0} D_n(u) f(x+u)\,du + \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\pi} D_n(u) f(x+u)\,du =$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^\pi D_n(t)f(x-t)\,dt+\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^\pi D_n(u)f(x+u)\,du=$$

$$=\frac{1}{\pi}\int\limits_0^\pi D_n(t)\frac{f(x+t)+f(x-t)}{2}\,dt. \qquad (55.15)$$

Мы получили удобное выражение для частичных сумм ряда Фурье. Из формулы (55.12) получаем еще

$$\frac{1}{\pi}\int\limits_0^\pi D_n(t)\,dt=1. \qquad (55.16)$$

Зафиксируем теперь число δ, $0<\delta<\pi$, и разобьем интеграл (55.15) на два:

$$S_n(x;\ f)=\frac{1}{\pi}\int\limits_0^\delta+\frac{1}{\pi}\int\limits_\delta^\pi. \qquad (55.17)$$

Второй интеграл

$$\frac{1}{\pi}\int\limits_\delta^\pi\frac{f(x+t)+f(x-t)}{2\sin\frac{t}{2}}\sin(2n+1)\frac{t}{2}\,dt$$

в случае, когда f — абсолютно интегрируемая на отрезке $[-\pi,\pi]$ функция, согласно теореме 2 п. 55.2, стремится к нулю при $n\to\infty$ (действительно, функция $\frac{1}{\sin\frac{t}{2}}$ ограничена и непрерывна на отрезке $[\delta,\pi]$, поэтому функция

$$\frac{f(x+t)+f(x-t)}{2\sin\frac{t}{2}}$$

абсолютно интегрируема на отрезке $[\delta,\pi]$).

Таким образом, доказана следующая теорема.

Теорема 3 (принцип локализации). *Существование и величина предела сумм Фурье $S_n(x;\ f)$ при $n\to\infty$ зависит только от существования и величины предела первого интеграла в формуле* (55.17), *т. е. интеграла*

$$\frac{1}{\pi}\int\limits_0^\delta D_n(t)\frac{f(x+t)+f(x-t)}{2}\,dt,$$

в подынтегральное выражение которого входят лишь значения функции f на отрезке $[x-\delta, x+\delta]$.

Из принципа локализации следует, что если две функции в некоторой окрестности (какой бы «малой» она ни была) точки x_0 совпадают, то для них одновременно в точке x_0 существуют или нет пределы частичных сумм ряда Фурье при $n \to \infty$, причем если эти пределы существуют, то они равны. Это тем более интересно, что ряды Фурье таких функций, вообще говоря, различны, ибо в формулы для коэффициентов Фурье входят значения функции по всему отрезку $[-\pi, \pi]$.

55.4. Сходимость рядов Фурье для кусочно дифференцируемых функций

Пусть функция f кусочно непрерывна на отрезке $[a, b]$ (см. определение 1 в п. 28.3) и пусть разбиение $\tau = \{x_i\}_{i=0}^{i=k}$ отрезка $[a, b]$ таково, что функция f непрерывна на каждом интервале (x_{i-1}, x_i), $i = 1, 2, \ldots, k$, и существуют конечные пределы $f(x_i - 0)$, $f(x_i + 0)$, $i = 1, 2, \ldots, k-1$, $f(x_0 + 0)$ и $f(x_k - 0)$, $(x_0 = a,\ x_k = b)$.

Через $f'_+(x)$ (соответственно через $f'_-(x)$), как и раньше (см. п. 9.1), обозначим производную справа (соответственно слева) функции $f(x)$ в точке x.

Определение 6. *Если кусочно непрерывная функция f дифференцируема на каждом вышеуказанном интервале (x_{i-1}, x_i), $i = 1, 2, \ldots, k$, и существуют конечные производные $f'_+(x_i)$, $f'_-(x_i)$, $i = 1, 2, \ldots, k-1$, $f'_+(x_0)$ и $f'_-(x_k)$, то функция f называется кусочно дифференцируемой на отрезке $[a, b]$.* При этом в точках x_i полагается $f'_+(x_i) = \lim\limits_{\Delta x_i \to +0} \dfrac{f(x_i + \Delta x_i) - f(x_i + 0)}{\Delta x_i}$, $f'_-(x_i) = \lim\limits_{\Delta x_i \to -0} \dfrac{f(x_i + \Delta x_i) - f(x_i - 0)}{\Delta x_i}$.

Мы изучим сходимость рядов Фурье кусочно дифференцируемых функций и даже функций несколько более общего вида.

Теорема 4. *Пусть функция f является кусочно непрерывной на отрезке $[-\pi, \pi]$ и в каждой точке x имеет конечные односторонние производные $f'_+(x)$ и $f'_-(x)$*), тогда ряд Фурье функции f в каждой точке x сходится и его сумма равна $\dfrac{f(x+0) + f(x-0)}{2}$**), в частности, в*

---

*) Заметим, что, очевидно, кусочно дифференцируемые на отрезке $[-\pi, \pi]$ функции удовлетворяют условиям теоремы.

**) В точках $x = \pi$ и $x = -\pi$ сумма ряда Фурье равна

$$\frac{f(-\pi + 0) + f(\pi - 0)}{2}.$$

точках непрерывности функции f ее ряд Фурье сходится к значению функции в этой точке.

Доказательство. Продолжим функцию f с полуинтервала $[-\pi, \pi)$ периодически с периодом 2π на всю вещественную ось, затем, применяя представление частичных сумм ряда Фурье в виде (55.15) и используя свойство (55.16) ядра Дирихле, получим

$$S_n(x;\ f)-\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}=$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_0^\pi \frac{f(x+t)+f(x-t)}{2}D_n(t)\,dt-\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}\,\frac{1}{\pi}\int_0^\pi D_n(t)\,dt=$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_0^\pi \frac{f(x+t)-f(x+0)}{2\sin\frac{t}{2}}\sin(2n+1)\frac{t}{2}\,dt+$$

$$+\frac{1}{\pi}\int_0^\pi \frac{f(x-t)-f(x-0)}{2\sin\frac{t}{2}}\sin(2n+1)\frac{t}{2}\,dt. \qquad (55.18)$$

Замечая, что

$$\lim_{t\to+0}\frac{f(x+t)-f(x+0)}{2\sin\frac{t}{2}}=\lim_{t\to+0}\frac{f(x+t)-f(x+0)}{t}\lim_{t\to+0}\frac{\frac{t}{2}}{\sin\frac{t}{2}}=f'_+(x),$$

заключаем: функция $\dfrac{f(x+t)-f(x+0)}{2\sin\frac{t}{2}}$ является кусочно непрерывной на отрезке $[0, \pi]$ и, следовательно, интегрируемой, поэтому в силу теоремы 2 (см. п. 55.2) имеем

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\pi}\int_0^\pi \frac{f(x+t)-f(x+0)}{2\sin\frac{t}{2}}\sin(2n+1)\frac{t}{2}\,dt=0.$$

Аналогично,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\pi}\int_0^\pi \frac{f(x-t)-f(x-0)}{2\sin\frac{t}{2}}\sin(2n+1)\frac{t}{2}\,dt=0.$$

Поэтому из (55.18) и получаем, что

$$\lim_{n\to\infty}S_n(x;\ f)=\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}.$$

Теорема доказана.

Теорема 4 означает, что в указанном смысле «любой» периодический процесс может быть с любой степенью точности представлен как линейная комбинация синусоид и косинусоид кратных дуг или, как говорят, «простых гармоник».

Упражнение 3. Доказать теорему 4 для функции f, абсолютно интегрируемой на отрезке $[-\pi, \pi]$ и имеющей в каждой точке конечные пределы $f(x-0)$, $f(x+0)$ и конечные односторонние производные $f'_+(x)$ и $f'_-(x)$.

Примеры. 1. Найдем ряд Фурье функции $\operatorname{ch} x$.

Для коэффициентов Фурье этой функции имеем

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{ch} x \, dx = \frac{\operatorname{sh} x}{\pi} \Big|_{-\pi}^{\pi} = \frac{2 \operatorname{sh} \pi}{\pi},$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{ch} x \cos nx \, dx = (-1)^n \frac{2 \operatorname{sh} \pi}{\pi (1 + n^2)}, \quad n = 1, 2, \ldots .$$

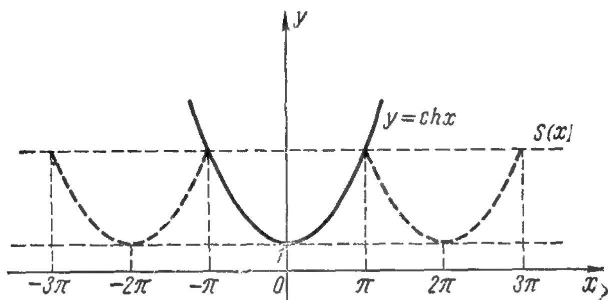


Рис. 172

Из четности функции $\operatorname{ch} x$ следует, что для нее $b_n = 0$, $n = 1, 2, \ldots$. Функция $\operatorname{ch} x$ удовлетворяет условиям теоремы 4 и $\operatorname{ch}(-\pi) = \operatorname{ch} \pi$, поэтому ее ряд Фурье во всех точках отрезка $[-\pi, \pi]$ сходится к самой функции $\operatorname{ch} x$:

$$\operatorname{ch} x = \frac{\operatorname{sh} \pi}{\pi} \left(1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{1 + n^2} \cos nx \right),$$

при этом ряд сходится равномерно, что сразу получается, если его сравнить со сходящимся числовым рядом $\sum_{0}^{\infty} \frac{1}{1+n^2}$.

Графики функции ch x и суммы $S(x)$ его ряда Фурье для сравнения изображены на рис. 172.

2. Найти ряд Фурье функции sh$x$.

В силу ее нечетности имеем

$$a_n = 0, \ n = 0, \ 1, \ 2, \dots;$$

далее,

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sh} x \sin nx \, dx = (-1)^{n-1} \frac{2n \operatorname{sh} \pi}{\pi(1+n^2)}, \ n = 1, \ 2, \dots.$$

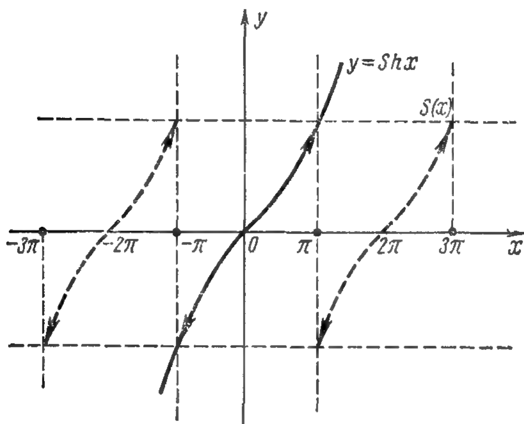


Рис. 173

Функция sh$x$ удовлетворяет условиям теоремы 2, но $\operatorname{sh}(-\pi) \neq \operatorname{sh}\pi$, поэтому во всех точках интервала $(-\pi, \pi)$ ряд Фурье функции sh$x$ сходится к самой функции:

$$\operatorname{sh} x = \frac{2 \operatorname{sh} \pi}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{n}{1+n^2} \sin nx,$$

а в точках $x = -\pi$ и $x = \pi$ — к значению $\frac{\operatorname{sh}(-\pi) + \operatorname{sh}\pi}{2} = 0$.

Ряд Фурье функции sh x уже не сходится равномерно к функции sh x на всем отрезке $[-\pi, \pi]$ (действительно, в противном случае его сумма должна была бы быть непрерывной на отрезке $[-\pi, \pi]$, а она имеет разрывы на концах). Графики функций sh x и суммы $S(x)$ ее ряда Фурье для сравнения изображены на рис. 173.

55.5. Суммирование рядов Фурье методом средних арифметических

Пусть функция f абсолютно интегрируема на отрезке $[-\pi, \pi]$, $f(-\pi) = f(\pi)$ и, следовательно, функция f периодически с периодом 2π продолжаема на всю вещественную ось. Пусть $S_n(x)$ — ее суммы Фурье, а $D_n(x)$ — ядра Дирихле, $n = 0, 1, 2, \dots$ (см. (55.11) и (55.12)).

Рассмотрим их средние арифметические:

$$\sigma_n(x) = \frac{S_0(x) + S_1(x) + \dots + S_n(x)}{n+1},$$

$$\Phi_n(x) = \frac{D_0(x) + D_1(x) + \dots + D_n(x)}{n+1}, \quad n = 0, 1, 2, \dots . \tag{55.19}$$

Сумма $\sigma_n(x)$ называется *суммой Фейера**) n-го порядка функции f, а $\Phi_n(x)$ — *ядром Фейера* n-го порядка.

Из формулы (55.13) получаем

$$\sigma_n(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \Phi_n(u) f(x+u)\, du. \tag{55.20}$$

Изучим прежде всего свойства ядра Фейера.

Лемма. *Ядро Фейера $\Phi_n(x)$ удовлетворяет следующим условиям:*

1) *функция $\Phi_n(x)$ периодическая с периодом 2π, четная и непрерывная;*

2) $\Phi_n(x) \geqslant 0$ *для всех* x;

3) $\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \Phi_n(x)\, dx = 1$;

4) *при любом фиксированном* δ, $0 < \delta < \pi$, *выполняется равенство*

$$\lim_{n \to \infty} \max_{\delta \leqslant |x| \leqslant \pi} \Phi_n(x) = 0.$$

Доказательство. Существование периода, равного 2π, у ядра Фейера, его четность и непрерывность следуют из существования такого периода, четности и непрерывности ядра Дирихле (см. п. 55.14), согласно самому определению ядра Фейера (см. 55.19). Найдем явное выражение для ядра Фейера. Из (55.19) и (55.12) получаем

$$(n+1)\Phi_n(x) = \sum_{k=0}^{n} D_k(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{\sin(2k+1)\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{2}} =$$

*) Л. Фейер (1880—1959) — венгерский математик.

$$= \sum_{k=0}^{n} \frac{2\sin\frac{x}{2}\sin(2k+1)\frac{x}{2}}{2\sin^2\frac{x}{2}} = \sum_{k=0}^{n} \frac{\cos kx - \cos(k+1)x}{2\sin^2\frac{x}{2}} =$$

$$= \frac{1-\cos(n+1)x}{2\sin^2\frac{x}{2}} = \frac{\sin^2\frac{n+1}{2}x}{\sin^2\frac{x}{2}}. \qquad (55.21)$$

Это справедливо при $x \neq 0$. При $x \to 0$ правая часть равенства (55.21) стремится к $(n+1)^2$, левая в точке $x=0$ непрерывна, следовательно, $\Phi_n(0) = n+1$. Значение $\Phi_n(0)$ можно найти и сразу по формуле (55.19), ибо $D_k(0) = 2k+1$, $k = 0, 1, 2\ldots$. Из формулы (55.21) видно, что ядро Фейера не отрицательно. Итак, свойства 1 и 2 доказаны.

Далее, применяя формулы (55.19) и (55.16), имеем

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \Phi_n(x)\,dx = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} D_k(x)\,dx = 1,$$

откуда в силу четности ядра Фейера и следует свойство 3.

Наконец, если $0 < \delta < \pi$, то из формулы (55.21) получаем

$$M(\delta) = \max_{\delta \leqslant |x| \leqslant \pi} \Phi_n(x) =$$

$$= \frac{1}{n+1} \max_{\delta \leqslant x \leqslant \pi} \frac{\sin^2\frac{n+1}{2}x}{\sin^2\frac{x}{2}} \leqslant \frac{1}{(n+1)\sin^2\frac{\delta}{2}}$$

и поскольку выражение в правой части неравенства стремится к нулю при $n \to \infty$, то свойство 4 также доказано.

Лемма доказана.

Теорема 5 (Фейер). *Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[-\pi, \pi]$ и $f(\pi) = f(-\pi)$, то при $n \to \infty$ суммы Фейера $\sigma_n(x)$ равномерно на отрезке $[-\pi, \pi]$ сходятся к функции $f(x)$.*

Доказательство. Продолжим функцию $f(x)$ периодически с периодом 2π на всю вещественную ось и оценим разность $f(x) - \sigma_n(x)$, используя представление сумм Фейера в виде (55.20) и свойства ядра Фейера, доказанные в лемме:

$$|f(x) - \sigma_n(x)| = \left| \frac{f(x)}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \Phi_n(u)\,du - \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \Phi_n(u) f(x+u)\,du \right| =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\left| \int_{-\pi}^{\pi} \Phi_n(u)\,[f(x) - f(x+u)]\,du \right| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\Phi_n(u)\,|f(x)-f(x+u)|\,du. \qquad (55.22)$$

Обозначим теперь через $\omega(\delta;\ f)$ модуль непрерывности функции f на всей числовой оси. Пусть фиксировано $\varepsilon>0$, в силу условия $f(\pi)=f(-\pi)$ функция f равномерно непрерывна на всей оси (почему?), поэтому существует такое $\delta>0$, что $\omega(\delta;\ f)<\frac{\varepsilon}{3}$.

Разобьем теперь интеграл, стоящий в правой части неравенства (55.22), на три интеграла:

$$|f(x)-\sigma_n(x)|\leqslant \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{-\delta}+\frac{1}{2\pi}\int_{-\delta}^{\delta}+\frac{1}{2\pi}\int_{\delta}^{\pi}. \qquad (55.23)$$

Для среднего интеграла имеем

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\delta}^{\delta}\Phi_n(u)\,|f(x)-f(x+u)|\,du\leqslant\omega(\delta;\ f)\frac{1}{2\pi}\int_{-\delta}^{\delta}\Phi_n(u)\,du\leqslant$$

$$\leqslant\omega(\delta;\ f)\,\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\Phi_n(u)\,du=\omega(\delta;\ f)<\frac{\varepsilon}{3}. \qquad (55.24)$$

Оставшиеся два интеграла оцениваются одинаково. Функция f в силу непрерывности ограничена: $|f(x)|\leqslant M$, $-\pi\leqslant x\leqslant\pi$. Поэтому, например, для последнего интеграла правой части неравенства (55.23) имеем

$$\frac{1}{2\pi}\int_{\delta}^{\pi}\Phi_n(u)\,|f(x)-f(x+u)|\,du\leqslant\frac{M}{\pi}\max_{\delta\leqslant u\leqslant\pi}\Phi_n(u)\,(\pi-\delta).$$

Согласно лемме (см. свойство 4 ядра Фейера), правая часть неравенства стремится к нулю при $n\to\infty$, поэтому существует такой номер n_ε, что при $n\geqslant n_\varepsilon$

$$\frac{1}{2\pi}\int_{\delta}^{\pi}<\frac{\varepsilon}{3}\ \text{ и }\ \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{-\delta}<\frac{\varepsilon}{3}. \qquad (55.25)$$

Теперь из неравенств (55.23), (55.24) и (55.25) при $n\geqslant n_\varepsilon$ получаем

$$|f(x)-\sigma_n(x)|<\varepsilon.$$

Теорема доказана.

Выше отмечалось, что для непрерывной функции ряд Фурье не обязан сходиться в каждой точке; тем не менее оказывается, что он

позволяет полностью восстановить всю функцию: достаточно образовать из его частичных сумм суммы Фейера — они уже сходятся и притом равномерно к самой функции f. Таким образом, даже изучение расходящегося ряда может оказаться полезным.

Можно и в случае произвольного ряда (не обязательно ряда Фурье) образовывать средние арифметические из его частичных сумм и исследовать их сходимость. Этот метод изучения рядов называется *суммированием ряда методом средних арифметических.*

55.6. Приближение непрерывных функций многочленами

Определение 7. *Функции вида*

$$\frac{A_0}{2}+\sum_{k=1}^{n} A_k \cos kx + B_k \sin kx, \quad A_n^2+B_n^2>0$$

называются тригонометрическими многочленами (полиномами) порядка n, $n=0, 1, 2, \ldots$.

Теорема 6 (Вейерштрасс). *Если функция f непрерывна на отрезке $[-\pi, \pi]$ и $f(-\pi)=f(\pi)$, то для каждого числа $\varepsilon>0$ существует такой тригонометрический полином $T(x)$, что*

$$|f(x)-T(x)|<\varepsilon, \quad -\pi \leqslant x \leqslant \pi.$$

Действительно, в силу теоремы 5 (см. п. 55.5) в качестве такого тригонометрического полинома можно взять, например, соответствующую сумму Фейера $\sigma_n(x)$, являющуюся, очевидно, тригонометрическим полиномом порядка не выше n.

Теорема 7 (Вейерштрасс). *Если функция f непрерывна на отрезке $[a, b]$, то для каждого числа $\varepsilon>0$ существует алгебраический полином $P(x)$, такой, что*

$$|f(x)-P(x)|<\varepsilon, \quad a \leqslant x \leqslant b.$$

Доказательство. Отобразим отрезок $[0, \pi]$ линейно на отрезок $[a, b]$:

$$x=a+\frac{b-a}{\pi}t, \quad 0 \leqslant t \leqslant \pi, \quad a \leqslant x \leqslant b,$$

и пусть $f^*(t)=f\left(a+\frac{b-a}{\pi}t\right)$. Функция f^* определена этой формулой на отрезке $[0, \pi]$. Продолжим ее четным образом на отрезок $[-\pi, 0]$, т. е. положим

$$f^*(t)=f^*(-t), \text{ если } t \in [-\pi, 0].$$

Полученная таким образом функция f^* непрерывна на отрезке $[-\pi, \pi]$ (почему?) и $f^*(-\pi) = f^*(\pi)$. Поэтому, согласно теореме 6, для любого числа $\varepsilon > 0$ существует тригонометрический полином $T(t)$, такой, что

$$|f^*(t) - T(t)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Как мы знаем, $\cos kt$ и $\sin kt$, $k = 0, 1, 2, \ldots$, а значит и тригонометрический полином $T(t)$ являются аналитическими функциями и разлагаются в степенные ряды, сходящиеся на всей вещественной прямой, и, следовательно, равномерно сходящиеся на каждом конечном отрезке (см. § 37):

$$T(t) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k t^k.$$

Если $P_n(t)$ суть частичные суммы этого ряда, то в силу его равномерной сходимости на отрезке $[-\pi, \pi]$ существует такой номер n_ε, что при $n \geqslant n_\varepsilon$

$$|T(t) - P_n(t)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Беря для определенности $n = n_\varepsilon$ и полагая $P(t) = P_{n_\varepsilon}(t)$, имеем

$$|f^*(t) - P(t)| \leqslant |f^*(t) - T(t)| + |T(t) - P(t)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon.$$

Возвращаясь к переменной x, т. е. полагая $t = \pi \frac{x-a}{b-a}$,

получим

$$\left| f(x) - P\left(\pi \frac{x-a}{b-a}\right) \right| < \varepsilon, \quad a \leqslant x \leqslant b,$$

где $P\left(\pi \frac{x-a}{b-a}\right)$ — очевидно, многочлен.

Теорема доказана.

З а м е ч а н и е. Пусть функция f непрерывна на отрезке $[a, b]$. Возьмем какую-либо последовательность чисел $\varepsilon_n > 0$, $n = 1, 2, \ldots$, стремящуюся к нулю $\left(\text{например, } \varepsilon_n = \frac{1}{n}\right)$; тогда, согласно теореме 7, для каждого $n = 1, 2, \ldots$ существует многочлен $P_n(x)$ (здесь n порядковый номер, а не степень многочлена), такой, что

$$|f(x) - P_n(x)| < \varepsilon_n, \quad a \leqslant x \leqslant b. \qquad (55.26)$$

Очевидно, при $n \to \infty$ $P_n(x) \rightrightarrows f(x)$ на отрезке $[a, b]$.

Итак, всякая непрерывная на отрезке функция является пределом равномерно сходящейся на этом отрезке последовательности многочленов. Обратное, т. е. что всякая функция, являющаяся пределом равномерно сходящейся на некотором отрезке последовательности многочленов (и, более того, последовательности любых непрерывных функций) непрерывна на этом отрезке, уже доказано (см. теорему 1′ в п. 36.3).

Таким образом, теорема Вейерштрасса устанавливает характеристическое свойство непрерывных и только непрерывных функций.

Весьма любопытно отметить, что первоначально понятие непрерывности функции было введено нами довольно абстрактно и достаточно общо, оно никак не было связано с конкретными классами элементарных функций, в частности с многочленами, и тем самым ни с какими аналитическими представлениями через многочлены.

Теорема Вейерштрасса показывает, что так введенный класс непрерывных функций в известном смысле не очень далек от класса многочленов! Именно, какова бы ни была непрерывная функция на отрезке и какова бы ни была заданная степень точности, всегда существует многочлен, отличающийся на данном отрезке от данной функции не более чем на заданную степень точности! Нетрудно получить и аналитическое представление в виде ряда для непрерывной на отрезке функции. Из (55.26) имеем

$$f(x) = \lim_{n \to \infty} P_n(x), \quad a \leqslant x \leqslant b, \tag{55.27}$$

или

$$f(x) = P_1(x) + \sum_{n=1}^{\infty} [P_{n+1}(x) - P_n(x)] \tag{55.28}$$

($P_n(x)$ — многочлены), причем стремление к пределу в (55.27) и сходимость ряда (55.28) происходят равномерно на отрезке $[a, b]$. Это оправдывает наивно интуитивное представление о функции как о чем-то таком, что представимо в виде формул.

Аналогичные замечания можно сделать и по поводу первой теоремы Вейерштрасса (теорема 6).

55.7. Полнота тригонометрической системы и системы неотрицательных целых степеней x

В этом пункте мы перефразируем доказанные в предыдущем пункте теоремы и выведем из них некоторые простые следствия.

Определение 8. *Пусть R — некоторое множество функций, определенных на отрезке $[a, b]$. Система функций*

$$\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n, \ldots \tag{55.29}$$

называется полной для множества R, если, какова бы ни была функция $f \in R$, для каждого $\varepsilon > 0$ существует такое конечное число функций $\varphi_{n_1}, \varphi_{n_2}, \ldots, \varphi_{n_k}$ из системы (55.29) и такие числа $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$, что

$$|f(x) - [\lambda_1\varphi_{n_1}(x) + \lambda_2\varphi_{n_2}(x) + \ldots + \lambda_k\varphi_{n_k}(x)]| < \varepsilon$$

для всех $x \in [a, b]$.

Иначе говоря, система функций (55.29) образует полную систему для множества R, если любую функцию из R можно сколь угодно точно приблизить конечными линейными комбинациями функций системы (55.29).

Используя понятие полноты системы, теоремы 6 и 7 предыдущего параграфа можно перефразировать соответственно следующим образом.

Теорема 6′. *Система тригонометрических функций* (55.2) *полна для множества непрерывных на отрезке $[-\pi, \pi]$ функций, принимающих на концах этого отрезка равные значения.*

Теорема 7′. *Система неотрицательных целых степеней x, т. е. система*

$$1,\ x,\ x^2,\ \ldots,\ x^n,\ \ldots, \tag{55.30}$$

полна для множества всех непрерывных на любом заданном отрезке функций.

Определение 9. *Пусть функции f и g определены на отрезке $[a, b]$. Величина*

$$\sqrt{\int_a^b [f(x) - g(x)]^2\, dx}$$

называется средним квадратичным отклонением на отрезке $[a, b]$ функции g от функции f).*

Определение 10. *Система функций* (55.29) *называется полной в смысле среднего квадратичного для некоторого множества R функций, определенных на отрезке $[a, b]$, если, какова бы ни была функция $f \in R$, для каждого $\varepsilon > 0$ существует такая конечная линейная комбинация функций системы* (55.29), *что ее среднее квадратичное отклонение на отрезке $[a, b]$ от функции f меньше ε.*

Теорема 8. *Система тригонометрических функций* (55.2) *полна в смысле среднего квадратичного в множестве непрерывных на отрезке $[-\pi, \pi]$ функций, принимающих в точках π и $-\pi$ одно и то же значение.*

---

*) Можно сказать «функции f от функции g», поскольку рассматриваемая величина не меняет своего значения, если функции f и g поменять местами.

Доказательство. Пусть f — непрерывная на отрезке $[-\pi, \pi]$ функция и пусть $f(\pi) = f(-\pi)$. Согласно теореме 6', для любого $\varepsilon > 0$ существует такой тригонометрический полином $T(x)$, что

$$|f(x) - T(x)| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{2\pi}}, \quad -\pi \leqslant x \leqslant \pi.$$

Отсюда для среднего квадратичного отклонения этого полинома от функции f имеем

$$\sqrt{\int_{-\pi}^{\pi} [f(x) - T(x)]^2 \, dx} < \frac{\varepsilon}{\sqrt{2\pi}} \sqrt{\int_{-\pi}^{\pi} dx} = \varepsilon.$$

Теорема доказана.

В дальнейшем мы увидим (см. п. 58.5), что ограничение $f(\pi) = f(-\pi)$, использованное нами при доказательстве теоремы 8 (только в этом случае можно было сослаться на теорему 6'), не является существенным. Именно, тригонометрическая система (55.2) полна в смысле среднего квадратичного во всем множестве непрерывных на отрезке $[-\pi, \pi]$ функций, и, более того, можно показать, что она полна в смысле среднего квадратичного и в множестве всех функций с интегрируемым на отрезке $[-\pi, \pi]$ квадратом.

Заметим, что тригонометрическая система (55.2) заведомо не полна в множестве всех непрерывных на отрезке $[-\pi, \pi]$ функций в смысле определения 8. Действительно, если функция f такова, что для любого $\varepsilon > 0$ существует такой тригонометрический полином T_ε, что

$$|f(x) - T_\varepsilon(x)| < \varepsilon, \quad -\pi \leqslant x \leqslant \pi,$$

то из условия $T_\varepsilon(\pi) = T_\varepsilon(-\pi)$ при $\varepsilon \to 0$ следует, что $f(\pi) = f(-\pi)$.

При приближении функций в смысле среднего квадратичного тригонометрическими полиномами особую роль играют частичные суммы ряда Фурье приближаемой функции. В следующем пункте будет показано, что частичная сумма n-го порядка имеет наименьшее среднее квадратичное отклонение от данной функции по сравнению с любым тригонометрическим полиномом степени n. Все эти обстоятельства говорят в пользу изучения приближения функций в смысле среднего квадратичного отклонения.

Наконец, можно показать, что если функция f имеет интегрируемый на отрезке $[-\pi, \pi]$ квадрат, то отклонение от нее в смысле среднего квадратичного ее частичных сумм Фурье $S_n(x)$ стремится к нулю, когда $n \to \infty$, или, что то же самое, функция f с интегрируемым квадратом является пределом в смысле среднего квадратичного (см. определение 5 в п. 55.2) своих частичных сумм Фурье (см. об этом в п. 58.5).

Аналогично теореме 8 доказывается следующая теорема.

Теорема 9. *Система неотрицательных целых степеней x, т. е. система* (55.30), *полна в смысле среднего квадратичного в множестве непрерывных на любом заданном отрезке функций.*

Доказательство. Пусть функция f непрерывна на некотором отрезке $[a, b]$. Тогда для каждого $\varepsilon > 0$, согласно теореме 7', существует такой полином P, что

$$|f(x)-P(x)| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{b-a}}, \quad a \leqslant x \leqslant b,$$

отсюда

$$\sqrt{\int_a^b [f(x)-P(x)]^2\,dx} < \varepsilon.$$

Теорема доказана.

55.8. Минимальное свойство коэффициентов Фурье. Неравенство Бесселя и равенство Парсеваля

В этом пункте рассмотрим ряды Фурье для интегрируемых функций, квадрат которых также интегрируем (здесь интегрируемость понимается, вообще говоря, в несобственном смысле) на отрезке $[-\pi, \pi]$. Это имеет смысл, так как если функция f такова, что ее квадрат f^2 интегрируем на отрезке $[-\pi, \pi]$, то из неравенства

$$|f| \leqslant \frac{1+|f|^2}{2}$$

следует, что функция $|f|$ интегрируема на этом отрезке. Обратное, вообще говоря, неверно. Существуют положительные функции (например, функция $\frac{1}{\sqrt{x}}$), интегрируемые на отрезке $[-\pi, \pi]$, квадрат которых, однако, уже не интегрируем на этом отрезке.

Таким образом, указанное множество функций с интегрируемым на отрезке $[-\pi, \pi]$ квадратом составляет строгую часть множества всех абсолютно интегрируемых на отрезке $[-\pi, \pi]$ функций.

Теорема 10. *Пусть f — функция с интегрируемым на отрезке $[-\pi, \pi]$ квадратом. Тогда, если $S_n(x)$ — ее сумма Фурье порядка n, то*

$$\int_{-\pi}^{\pi} [f(x)-S_n(x)]^2\,dx = \min_{T_n(x)} \int_{-\pi}^{\pi} [f(x)-T_n(x)]^2\,dx, \qquad (55.31)$$

где минимум в правой части равенства берется по всем тригонометрическим многочленам T_n степени не выше n.

Если $a_0, a_n, b_n, n = 1, 2, \dots,$ суть коэффициенты Фурье функции f, то справедливо неравенство

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 + b_n^2 \leqslant \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\,dx, \tag{55.32}$$

называемое неравенством Бесселя).*

Доказательство. Пусть

$$T_n(x) = \frac{A_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} A_k \cos kx + B_k \sin kx,$$

тогда, открывая квадратные скобки в выражении

$$\int_{-\pi}^{\pi} [f(x) - T_n(x)]^2\,dx \tag{55.33}$$

и используя лемму из п. 55.1 (в частности, ортогональность тригонометрической системы), получим

$$\int_{-\pi}^{\pi} [f(x) - T_n(x)]^2\,dx = \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\,dx + \pi\left(\frac{A_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{n} A_k^2 + B_k^2\right) -$$

$$-2\left[\frac{A_0}{2}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx + \sum_{k=1}^{n} A_k \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos kx\,dx +\right.$$

$$\left.+ B_k \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin kx\,dx\right] = \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\,dx + \pi\left(\frac{A_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{n} A_k^2 + B_k^2\right) -$$

$$-2\pi\left[\frac{a_0A_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} a_kA_k + b_kB_k\right] = \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\,dx +$$

$$+\pi\left[\frac{(A_0 - a_0)^2}{2} + \sum_{k=1}^{n} (A_k - a_k)^2 + (B_k - b_k)^2\right] -$$

$$-\pi\left[\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{n} a_k^2 + b_k^2\right]. \tag{55.34}$$

---

*) Ф. Бессель (1784—1846) — немецкий астроном и математик.

Из полученного выражения видно, что величина (55.33) принимает наименьшее значение, когда $A_0 = a_0$, $A_k = a_k$, $B_k = b_k$, $k = 1, 2, \ldots,$ т. е. тогда, когда $T_n(x)$ является суммой Фурье $S_n(x)$ функции f. Первое утверждение теоремы доказано.

Если $T_n(x) = S_n(x)$, то из (55.34) следует, что

$$\int_{-\pi}^{\pi} [f(x) - S_n(x)]^2\,dx = \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\,dx - \pi\left[\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{n} a_k^2 + b_k^2\right], \tag{55.35}$$

откуда

$$\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\,dx - \pi\left[\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{n} a_k^2 + b_k^2\right] \geqslant 0.$$

Это неравенство справедливо при любом натуральном n. Переходя в нем к пределу при $n \to \infty$, получим неравенство

$$\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\,dx - \pi\left[\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k^2 + b_k^2\right] \geqslant 0,$$

очевидно, равносильное неравенству (55.32).

Теорема доказана.

Из неравенства Бесселя следует, что для функции с интегрируемым квадратом ряд

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 + b_n^2$$

сходится.

Общий член сходящегося ряда стремится к нулю, поэтому в рассматриваемом случае

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = 0.$$

Таким образом, мы еще раз получили стремление к нулю коэффициентов Фурье (см. п. 55.2), однако на этот раз для более узкого (как это отмечалось в начале этого пункта) класса функций, чем раньше, а именно для класса функций с интегрируемым квадратом.

В п. 58.5 будет показано, что на самом деле формула (55.32) справедлива со знаком равенства. Здесь мы докажем этот факт лишь для случая, когда функция f непрерывна и имеет период, равный 2π.

Теорема 11. *Пусть функция f непрерывна на отрезке $[-\pi, \pi]$, $f(-\pi)=f(\pi)$ и a_0, a_n, b_n, $n=1, 2, \ldots$,— ее коэффициенты Фурье. Тогда справедливо равенство*

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\,dx=\frac{a_0^2}{2}+\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2+b_n^2,$$

называемое равенством Парсеваля).*

Доказательство. Для каждого $\varepsilon>0$ в силу полноты в смысле среднего квадратичного системы тригонометрических функций (55.2) в классе непрерывных функций, принимающих одинаковые значения на концах отрезка $[-\pi, \pi]$, для функции f существует тригонометрический полином $T(x)$ некоторого порядка k, такой, что

$$\int_{-\pi}^{\pi}[f(x)-T(x)]^2\,dx<\varepsilon. \tag{55.36}$$

Согласно же теореме 10 [см. (55.31)], для суммы Фурье $S_k(x)$ того же порядка k выполняется неравенство

$$\int_{-\pi}^{\pi}[f(x)-S_k(x)]^2\,dx\leqslant\int_{-\pi}^{\pi}[f(x)-T(x)]^2\,dx.$$

Отсюда и из формул (55.35) и (55.36) получим

$$\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\,dx-\left[\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2+b_n^2\right]\leqslant\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)dx-\left[\frac{a_0^2}{2}+\sum_{n=1}^{k} a_n^2+b_n^2\right]=$$

$$=\int_{-\pi}^{\pi}\left[f(x)-S_k(x)\right]^2dx\leqslant\int_{-\pi}^{\pi}\left[f(x)-T(x)\right]^2<\varepsilon.$$

Поскольку это неравенство справедливо при любом $\varepsilon>0$, то левая его часть равна нулю.

Теорема доказана.

Следствие. *В предположениях теоремы*

$$\lim_{n\to\infty}\int_{-\pi}^{\pi}[f(x)-S_n(x)]^2\,dx=0.$$

55.9. Характер сходимости рядов Фурье. Почленное дифференцирование и интегрирование рядов Фурье

Изучим связь рядов Фурье функции и ее производной.

Теорема 12. *Пусть функция f непрерывна на отрезке $[-\pi, \pi]$, $f(-\pi)=f(\pi)$ и пусть*

*) М. Парсеваль (ум. в 1836 г.) — французский математик.

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx.$$

Если функция f имеет кусочно непрерывную (см. определение 1 в п. 30.2) на отрезке $[-\pi, \pi]$ производную f', то

$$f'(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} -na_n \sin nx + nb_n \cos nx,$$

т. е. ряд Фурье производной получается из ряда Фурье самой функции формальным почленным дифференцированием).*

Доказательство. Пусть

$$f'(x) \sim \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \cos nx + \beta_n \sin nx.$$

Тогда, замечая, что $f(\pi) = f(-\pi)$, и интегрируя по частям, получим

$$\alpha_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f'(t)\,dt = \frac{1}{\pi}[f(\pi) - f(-\pi)] = 0,$$

$$\alpha_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f'(t) \cos nt\,dt = f(t) \cos nt \Big|_{-\pi}^{\pi} + \frac{n}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin nt\,dt = nb_n,$$

$$\beta_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f'(t) \sin nt\,dt = f(t) \sin nt \Big|_{-\pi}^{\pi} - \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos nt\,dt = -na_n,$$

$$n = 1, 2, \ldots.$$

Теорема доказана.

Перейдем к изучению скорости сходимости ряда Фурье в зависимости от гладкости функций. Предварительно докажем лемму.

Лемма. *Пусть функция f имеет на отрезке $[-\pi, \pi]$ производные до порядка k включительно ($k \geqslant 1$),*

$$f^{(j)}(-\pi) = f^{(j)}(\pi), \quad j = 0, 1, \ldots, k-1,$$

$f^{(k)}(x)$ — кусочно непрерывная функция и пусть

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx,$$

*) При этом без каких-либо предположений о сходимости ряда Фурье функции или ее производной!

тогда

$$|a_n| \leqslant \frac{\varepsilon_n}{n^k}, \ |b_n| \leqslant \frac{\varepsilon_n}{n^k}, \ n = 1, 2, \ldots,$$

где $\varepsilon_n > 0$ *и ряд* $\sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n^2$ *сходится.*

Доказательство. Применяя последовательно теорему 12 k раз, получим

$$f^{(k)}(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \cos nx + \beta_n \sin nx,$$

где либо

$$\alpha_n = \pm n^k a_n, \ \beta_n = \pm n^k b_n, \tag{55.37}$$

либо

$$\alpha_n = \pm n^k b_n, \ \beta_n = \pm n^k a_n. \tag{55.38}$$

Положим $\varepsilon_n = \sqrt{\alpha_n^2 + \beta_n^2}$. В силу неравенства Бесселя (55.32) для функции $f^{(k)}(x)$ ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n^2$ сходится.

Если справедливо (55.37), то

$$|a_n| = \frac{|\alpha_n|}{n^k} = \frac{\sqrt{\alpha_n^2 + \beta_n^2}}{n^k} \leqslant \frac{\varepsilon_n}{n^k}.$$

Аналогично

$$|b_n| \leqslant \frac{\varepsilon_n}{n^k}, \ k = 1, 2, \ldots .$$

Подобным же образом эта оценка получается и в случае (55.38).

Лемма доказана.

Теорема 13. *Пусть функция f имеет на отрезке $[-\pi, \pi]$ производные до порядка k включительно ($k \geqslant 1$), причем ее k-я производная кусочно непрерывная и $f^{(j)}(-\pi) = f^{(j)}(\pi)$, $j = 0, 1, \ldots, k-1$, тогда ряд Фурье функции f равномерно на всем периоде сходится к самой функции f и*

$$|f(x) - S_n(x; f)| \leqslant \frac{\eta_n}{n^{k-\frac{1}{2}}}, \tag{55.39}$$

где $\lim\limits_{n \to \infty} \eta_n = 0$ *($\{\eta_n\}$ — числовая последовательность), а* $S_n(x; f)$ — *n-я сумма Фурье функции f.*

Таким образом, можно сказать, что на периоде равномерно выполняется оценка

$$|f(x)-S_n(x;\ f)|=o\left(\frac{1}{n^{k-\frac{1}{2}}}\right).$$

Предварительно заметим, что если $\{u_n\}$ и $\{v_n\}$ — последовательности неотрицательных чисел, таких, что

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n^2<+\infty \quad \text{и} \quad \sum_{n=1}^{\infty} v_n^2<+\infty,$$

то

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n v_n \leqslant \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} u_n^2}\ \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} v_n^2}. \tag{55.40}$$

Действительно, это неравенство сразу получается предельным переходом из неравенства Коши — Шварца:

$$\sum_{n=1}^{N} u_n v_n \leqslant \sqrt{\sum_{n=1}^{N} u_n^2}\ \sqrt{\sum_{n=1}^{N} v_n^2} \quad (\text{см. п. } 18.1).$$

Доказательство теоремы 13. Пусть

$$f(x)\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{m=1}^{\infty} a_m\cos mx+b_m\sin mx, \tag{55.41}$$

$$S_n(x;\ f)=\frac{a_0}{2}+\sum_{m=1}^{n} a_m\cos mx+b_m\sin mx.$$

По лемме

$$|a_m|\leqslant\frac{\varepsilon_m}{m^k},\quad |b_m|\leqslant\frac{\varepsilon_m}{m^k}, \tag{55.42}$$

где ε_m таково, что ряд

$$\sum_{m=1}^{\infty} \varepsilon_m^2 \tag{55.43}$$

сходится.

Применяя неравенства (55.40) и (55.42), оценим остаток $r_n(x)$ ряда (55.41):

$$|r_n(x)|=\left|\sum_{m=n+1}^{\infty} a_m\cos mx+b_m\sin mx\right|\leqslant\sum_{m=n+1}^{\infty}|a_m|+|b_m|\leqslant$$

$$\leqslant 2 \sum_{m=n+1}^{\infty} \frac{\varepsilon_m}{m^k} \leqslant 2 \sqrt{\sum_{m=n+1}^{\infty} \varepsilon_m^2} \sqrt{\sum_{m=n+1}^{\infty} \frac{1}{m^{2k}}} . \tag{55.44}$$

Положим

$$\varkappa_n = \sum_{m=n+1}^{\infty} \varepsilon_m^2.$$

В силу сходимости ряда (55.43) имеем

$$\lim_{n \to \infty} \varkappa_n = 0. \tag{55.45}$$

Далее,

$$\sum_{m=n+1}^{\infty} \frac{1}{m^{2k}} \leqslant \int_n^{+\infty} \frac{dx}{x^{2k}} = \frac{1}{(2k-1)\, n^{2k-1}}. \tag{55.46}$$

Положим, наконец, $\eta_n = \frac{2}{\sqrt{2k-1}} \sqrt{\varkappa_n}$; очевидно, $\lim\limits_{n \to \infty} \eta_n = 0$. Теперь в силу (55.45) и (55.46) из неравенства (55.44) получаем

$$|r_n(x)| \leqslant \frac{\eta_n}{n^{k-\frac{1}{2}}} = o\left(\frac{1}{n^{k-\frac{1}{2}}}\right), \quad n = 1,\ 2,\ \ldots,$$

при этом бесконечно малая η_n не зависит от точки x.

Согласно теореме 4 п. 55.4, ряд (55.41) сходится к функции $f(x)$, поэтому $r_n(x) = f(x) - S_n(x, f)$ и, таким образом, оценка (55.39) также доказана.

Теорема доказана.

Теорема 13 показывает, что чем глаже функция f, т. е. чем больше она имеет производных, тем быстрее сходится к ней ее ряд Фурье. При этом неравенство (55.39) дает возможность оценивать погрешность, получающуюся при замене ряда Фурье его n-й частичной суммой.

Из этой теоремы следует в частности, что ряд Фурье всякой непрерывной и кусочно непрерывно дифференцируемой функции (см. п. 30.2) равномерно на всем периоде сходится к самой функции.

Теорема 14. *Пусть f — непрерывная на отрезке $[-\pi, \pi]$ функция и*

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx \tag{55.47}$$

— ее ряд Фурье, тогда

$$\int_0^t f(x)\,dx = \int_0^t \frac{a_0 dx}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^t (a_n \cos nx + b_n \sin nx)\,dx =$$

$$= \frac{a_0 t}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n} \sin nt + \frac{b_n}{n}(1 - \cos nt) \qquad (55.48)$$

и ряд, стоящий справа, сходится равномерно.

Отметим, что утверждение о сходимости (и даже равномерной) ряда (55.48) имеет место без каких-либо предположений о сходимости исходного ряда (55.47).

Доказательство. Рассмотрим функцию

$$F(t) = \int_0^t \left[f(x) - \frac{a_0}{2}\right] dx. \qquad (55.49)$$

Она непрерывна на отрезке $[-\pi, \pi]$, имеет на этом отрезке непрерывную производную $F'(t) = f(t) - \frac{a_0}{2}$ и

$$F(\pi) - F(-\pi) = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx - \pi a_0 = 0.$$

Поэтому в силу теоремы 13 ее ряд Фурье сходится к ней и притом равномерно:

$$F(x) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos nx + B_n \sin nx. \qquad (55.50)$$

Найдем коэффициенты Фурье этого ряда. Интегрируя по частям, получим

$$A_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F(t) \cos nt\,dt =$$

$$= \frac{1}{\pi} F(t) \frac{\sin nt}{n} \Big|_{-\pi}^{\pi} - \frac{1}{n\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin nt\,dt = -\frac{b_n}{n}.$$

Аналогично

$$B_n = \frac{a_n}{n}.$$

Чтобы найти A_0, положим в (55.50) $x=0$, тогда, замечая, что $F(0)=0$, получим

$$\frac{A_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty} A_n=0, \quad \text{откуда} \quad \frac{A_0}{2}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{b_n}{n}$$

$\left(\text{ряд справа сходится, ибо } \frac{b_n}{n}<\frac{1}{2}\left(b_n^2+\frac{1}{n^2}\right)\right)$.

Итак,

$$F(t)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n}\sin nt+\frac{b_n}{n}(1-\cos nt).$$

Отсюда и из (55.49) и следует формула (55.48).

Теорема доказана.

Задача 25. Доказать, что сходящийся тригонометрический ряд $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{\sin nx}{\ln n}$ не является рядом Фурье.

55.10. Ряды Фурье в случае произвольного интервала. Комплексная запись рядов Фурье

Теория классических рядов Фурье легко переносится и на случай периодических функций с любым периодом $2l$. Для этого достаточно отрезок $[-l, l]$ отобразить на отрезок $[-\pi, \pi]$ с помощью линейного отображения:

$$y=\frac{\pi}{l}x, \quad -l\leqslant x\leqslant l, \quad -\pi\leqslant y\leqslant \pi,$$

тогда вопрос сведется к уже рассмотренному случаю. Ряд Фурье функции f с периодом $2l$ в исходной переменной x имеет вид

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty} a_n\cos\frac{n\pi x}{l}+b_n\sin\frac{n\pi x}{l},$$

где

$$a_0=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\,dx, \quad a_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}\,dx,$$

$$b_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}\,dx, \quad n=1, 2, \ldots .$$

В заключение отметим еще так называемую комплексную запись рядов Фурье, часто используемую в математике и ее приложениях. Пусть

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx. \tag{55.51}$$

Как известно (см. п. 37.5),

$$\cos nx = \frac{1}{2}(e^{nxi} + e^{-nxi}), \tag{55.52}$$

$$\sin nx = \frac{1}{2i}(e^{nxi} - e^{-nxi}) = \frac{i}{2}(e^{-nxi} - e^{nxi}). \tag{55.53}$$

Подставляя (55.52) и (55.53) в (55.51), получим

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2}(a_n - b_n i)\, e^{nxi} + \frac{1}{2}(a_n + b_n i)\, e^{-nxi}.$$

Полагая

$$c_0 = \frac{a_0}{2}, \quad c_n = \frac{1}{2}(a_n - b_n i), \quad c_{-n} = \frac{1}{2}(a_n + b_n i),$$

имеем

$$f(x) \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}, \tag{55.54}$$

где, очевидно, $\overline{c_n} = c_{-n}$, $n = 1, 2, \ldots$; вспоминая, что $\cos\alpha \pm i\sin\alpha = e^{\pm i\alpha}$ (см. п. 37.5), получаем

$$c_n = \frac{1}{2}(a_n - b_n i) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)(\cos nx - i\sin nx)\,dx =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, e^{-inx}\,dx, \tag{55.55}$$

$$c_{-n} = \frac{1}{2}(a_n + b_n i) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, e^{inx}\,dx.$$

Подставляя (55.55) в (55.54), получим

$$f(x) \sim \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{inx} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\, e^{-int}\,dt. \tag{55.56}$$

Таким образом, получаем запись ряда Фурье в комплексной форме и соответствующие выражения для коэффициентов.

Требуют разъяснения лишь понятие сходимости ряда вида (55.56) и смысл интеграла от комплекснозначной функции.

Частичной суммой порядка n ряда

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} z_n \tag{55.57}$$

называется сумма $S_n = \sum_{k=-n}^{n} z_k$. Ряд (55.57) называется сходящимся, если существует $S = \lim_{n\to\infty} S_n$, при этом S называется суммой ряда и пишется

$$S = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} z_n.$$

Если функция $w(x)$ вещественного переменного x принимает комплексные значения $w(x) = u(x) + iv(x)$, то мы положим по определению

$$\int_a^b w(x)\,dx = \int_a^b u(x)\,dx + i\int_a^b v(x)\,dx.$$

§ 56. ИНТЕГРАЛ ФУРЬЕ И ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ФУРЬЕ

56.1. Представление функций в виде интеграла Фурье

Пусть функция f абсолютно интегрируема на всей вещественной оси. Напишем для нее интеграл, соответствующий в определенном смысле ряду Фурье, в котором суммирование по индексу n заменено интегрированием по некоторому параметру:

$$\int_0^{+\infty} [a(y)\cos xy + b(y)\sin xy]\,dy, \tag{56.1}$$

где

$$a(y) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\cos yt\,dt, \tag{56.2}$$

$$b(y) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\sin yt\,dt. \tag{56.3}$$

Формулы (56.2) и (56.3) напоминают формулы для коэффициентов Фурье.

Определение 1. *Интеграл* (56.1) *называется интегралом Фурье функции* f.

Подставляя (56.2) и (56.3) в интеграл (56.1), преобразуем его следующим образом:

$$\int_0^{+\infty} [a(y)\cos xy + b(y)\sin xy]\,dy = \frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty} dy \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)(\cos ty\cos xy +$$

$$+ \sin ty \sin xy)\,dt = \frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty} dy \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\cos y(x-t)\,dt. \qquad (56.4)$$

Подобно тому, как сумма ряда Фурье функции при определенных условиях дает значение самой функции, интеграл Фурье также дает представление исходной функции.

Теорема 1. *Пусть функция* f *кусочно непрерывна на каждом конечном отрезке и абсолютно интегрируема на всей вещественной прямой, пусть в каждой точке* x *существуют производная справа* $f'_+(x)$ *и производная слева* $f'_-(x)$, *тогда справедлива формула*

$$\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2} = \frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty} dy \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\cos y(x-t)\,dt. \qquad (56.5)$$

Доказательство. Рассмотрим интеграл

$$S(\eta) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\eta} dy \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\cos y(x-t)\,dt, \qquad (56.6)$$

где $\eta > 0$, а x — произвольное фиксированное число.

Очевидно, что интеграл Фурье

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty} dy \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\cos y(x-t)\,dt \qquad (56.7)$$

является пределом функции (56.6) при $\eta \to +\infty$, т. е. $S(\eta)$ является в этом смысле аналогом частичных сумм рядов Фурье.

Для каждого числа $\xi > 0$, согласно теореме об интегрировании интегралов, зависящих от параметра (см. п. 53.1), имеем

$$\int_0^{\eta} dy \int_{-\xi}^{\xi} f(t)\cos y(t-x)\,dt = \int_{-\xi}^{\xi} f(t)\,dt \int_0^{\eta} \cos y(x-t)\,dy =$$

$$= \int\limits_{-\xi}^{\xi} f(t) \frac{\sin \eta (x-t)}{x-t}\, dt. \tag{56.8}$$

Действительно, в силу кусочной непрерывности функции $f(t)$ прямоугольник $-\xi \leqslant t \leqslant \xi$, $0 \leqslant y \leqslant \eta$, можно разбить прямыми, параллельными оси Oy, на конечное число прямоугольников, на каждом из которых функция $f(t) \cos y(x-t)$ будет уже непрерывна, как функция двух переменных, вплоть до границы (если на границе указанных прямоугольников в нужном случае брать предельные значения функции f, т. е. $f(t+0)$ или $f(t-0)$). Применяя теорему 3 из п. 53.1 к каждому прямоугольнику и суммируя полученные результаты, мы и получим формулу (56.8).

Из очевидного неравенства

$$|f(t) \cos y(x-t)| \leqslant |f(t)|$$

и сходимости интеграла $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} |f(t)| dt$ следует равномерная сходимость на отрезке $[0, \eta]$ относительно параметра y интеграла

$$F(y) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cos y(x-t)\, dt, \tag{56.9}$$

т. е. функция

$$F(y, \xi) = \int\limits_{-\xi}^{\xi} f(t) \cos y(x-t)\, dt$$

равномерно на отрезке $[0, \eta]$ стремится к пределу (56.9) при $\xi \to +\infty$.

Далее, функция $F(y, \xi)$ непрерывна по y. Действительно, функция f ограничена на отрезке $[-\xi, \xi]: |f(t)| \leqslant M$, $-\xi \leqslant t \leqslant \xi$. Обозначим через $\omega(\delta)$ модуль непрерывности функции $\cos y(x-t)$, $0 \leqslant y \leqslant \eta$, $-\xi \leqslant t \leqslant \xi$. Тогда $\lim\limits_{\delta \to 0} \omega(\delta) = 0$, поэтому

$$|F(y+\Delta y, \xi) - F(y, \xi)| \leqslant$$

$$\leqslant \int\limits_{-\xi}^{\xi} |f(t)| |\cos(y+\Delta y)(x-t) - \cos y(x-t)|\, dt \leqslant 2M\xi\omega(\Delta y) \to 0$$

при $\Delta y \to 0$.

Поэтому в силу теоремы 2 п. 53.1 в левом интеграле равенства (56.8) можно перейти к пределу под знаком интеграла при $\xi \to +\infty$.

В результате получим

$$S(\eta) = \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t) \frac{\sin \eta (x-t)}{x-t}\, dt.$$

Этот интеграл конечен (почему?); он является аналогом интеграла Дирихле для рядов Фурье. Полагая $u = t - x$ (ср. (55.13)), получим

$$S(\eta) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(u+x)\frac{\sin\eta u}{u}\,du.$$

Представляя получившийся интеграл в виде суммы двух:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} = \int_{-\infty}^{0} + \int_{0}^{+\infty}$$

и делая в первом из них замену $u = -t$, получим

$$S(\eta) = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{+\infty} [f(x+t) + f(x-t)]\frac{\sin\eta t}{t}\,dt.$$

Вспоминая (см. п. 54.3), что при $\eta > 0$

$$\int_{0}^{+\infty} \frac{\sin\eta t}{t}\,dt = \frac{\pi}{2},$$

получим

$$S(\eta) - \frac{f(x+0)+f(x-0)}{2} = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{+\infty} [f(x+t)+f(x-t)]\frac{\sin\eta t}{t}\,dt -$$

$$-[f(x+0)+f(x-0)]\frac{1}{\pi}\int_{0}^{+\infty}\frac{\sin\eta t}{t}\,dt =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{0}^{+\infty}\frac{f(x+t)-f(x+0)}{t}\sin\eta t\,dt + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{+\infty}\frac{f(x-t)-f(x-0)}{t}\sin\eta t\,dt. \tag{56.10}$$

Рассмотрим, например, первый интеграл, стоящий в правой части этого равенства. Разобьем его на два интеграла:

$$\int_{0}^{+\infty} = \int_{0}^{1} + \int_{1}^{\infty}.$$

Поскольку

$$\lim_{t\to+0}\frac{f(x+t)-f(x+0)}{t} = f'_{+}(x),$$

то функция $\frac{f(x+t)-f(x-0)}{t}$ является кусочно непрерывной функцией переменной t на отрезке $[0, 1]$, и поэтому в силу теоремы 2 из п. 55.2

$$\lim_{\eta\to+\infty}\int_0^1 \frac{f(x+t)-f(x+0)}{t}\sin \eta dt=0. \tag{56.11}$$

Функция $\frac{f(x+t)}{t}$ также кусочно непрерывна на любом отрезке полуоси $t \geqslant 1$ и поскольку

$$\left|\frac{f(x+t)}{t}\right| \leqslant |f(x+t)|,$$

то она абсолютно интегрируема на этой полуоси и, следовательно, в силу той же теоремы

$$\lim_{\eta\to+\infty}\int_1^{+\infty} \frac{f(x+t)}{t}\sin \eta t dt=0. \tag{56.12}$$

Наконец, из сходимости интеграла $\int\limits_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}dt$ (см. п. 34.4), делая замену переменного $u=\eta t$, получаем

$$\lim_{\eta\to+\infty}\int_1^{+\infty} \frac{f(x+0)}{t}\sin \eta t dt=f(x+0)\lim_{\eta\to+\infty}\int_\eta^{+\infty}\frac{\sin u}{u}du=0. \tag{56.13}$$

Из (56.11), (56.12) и (56.13) следует, что

$$\lim_{\eta\to+\infty}\frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty} \frac{f(x+t)-f(x+0)}{t}\sin \eta t dt=0.$$

Аналогично доказывается, что

$$\lim_{\eta\to+\infty}\frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty} \frac{f(x-t)-f(x-0)}{t}\sin \eta t dt=0.$$

Отсюда в силу (56.10) получаем

$$\lim_{\eta\to+\infty} S(\eta)=\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}.$$

Предел левой части также равен интегралу Фурье (56.7).

Теорема доказана.

Упражнение 1. Доказать, что если функция f в дополнение к наложенным на нее в теореме 1 ограничением является четной, соответственно нечетной, то справедливы формулы

$$\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}=\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}\cos yx\,dy\int_0^{+\infty}f(t)\cos yt\,dt,$$

соответственно

$$\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}=\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}\sin yx\,dy\int_0^{+\infty}f(t)\sin yt\,dt.$$

56.2. Различные виды записи формулы Фурье. Преобразование Фурье

В дальнейшем для простоты записи будем считать, что функция f в дополнение к условиям, сформулированным в теореме 1 п. 56.1, непрерывна во всех точках. В этом случае справедлива формула Фурье

$$f(x)=\frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty}dy\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\cos y(x-t)\,dt,$$

и так как подынтегральная функция четная относительно переменной y, то

$$f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}dy\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\cos y(x-t)\,dt. \tag{56.14}$$

В силу очевидного неравенства

$$|f(t)\sin y(x-t)|\leqslant|f(t)|$$

при сделанных ограничениях на функцию f существует также интеграл

$$\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\sin y(x-t)\,dt,$$

причем в силу признака Вейерштрасса (см. п. 54.1) он равномерно сходится на всей вещественной оси переменного y и, следовательно, является непрерывной функцией от y. Поэтому для любого числа η существует интеграл

$$\int_{-\eta}^{\eta}dy\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\sin y(x-t)\,dt, \tag{56.15}$$

причем в силу нечетности подынтегральной функции относительно переменной y этот интеграл равен нулю. Однако при сделанных предположениях относительно функции f нельзя гарантировать существование несобственного интеграла

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dy \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \sin y(x-t)\, dt. \tag{56.16}$$

Введем следующее определение.

Определение 2. *Пусть функция φ интегрируема на любом конечном отрезке, если существует конечный предел*

$$\lim_{\eta\to+\infty} \int_{-\eta}^{\eta} \varphi(x)\, dx, \quad \eta > 0$$

(а не предел $\lim\limits_{\substack{\eta\to+\infty\\ \xi\to-\infty}} \int_{\xi}^{\eta} \varphi(x)\, dx$, где ξ и η стремятся к бесконечности независимо друг от друга, как при определении несобственного интеграла, см. п. 34.1), то он называется главным значением интеграла $\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x)\, dx$ и обозначается буквами v.p.):*

$$v.p. \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)\, dx = \lim_{\eta\to+\infty} \int_{-\eta}^{\eta} \varphi(x)\, dx.$$

Подобным же образом определяется и главное значение несобственного интеграла в точке: пусть $a < c < b$ и функция φ интегрируема по Риману на отрезках $[a, c-\varepsilon]$ и $[c+\varepsilon, b]$ при любом $\varepsilon > 0$ (естественно, предполагается также, что $a < c - \varepsilon$ и $c + \varepsilon < b$); тогда главное значение интеграла $\int_a^b \varphi(x)dx$ в точке c определяется формулой

$$v.p. \int_a^b \varphi(x)\, dx = \lim_{\varepsilon\to 0} \left[\int_a^{c-\varepsilon} \varphi(x)\, dx + \int_{c+\varepsilon}^{b} \varphi(x)\, dx \right].$$

Заметим, например, что интегралы $\int_{-\infty}^{+\infty} x\,dx$ и $\int_{-1}^{1} \frac{dx}{x}$ не существуют, как несобственные, однако существуют в смысле главного значения, которое в обоих случаях равно нулю. Если же существует несобственный интеграл, то существует и его главное значение, причем они, очевидно, совпадают.

*) Главное значение по-французски — valeur principale.

Мы будем систематически рассматривать существенно комплекснозначные функции $w(t) = u(t) + iv(t)$ вещественного аргумента t. Мы уже встречались с понятием предела и непрерывности подобных функций. Производная функции $w(t)$ определяется по формуле

$$w'(t) = u'(t) + iv'(t).$$

Покажем, например, что, согласно этому правилу, $(e^{i\alpha t})' = i\alpha e^{i\alpha t}$. Действительно,

$$(e^{i\alpha t})' = (\cos\alpha t + i\sin\alpha t)' = -\alpha\sin\alpha t + i\alpha\cos\alpha t = \\ = i\alpha(\cos\alpha t + i\sin\alpha t) = i\alpha e^{i\alpha t}.$$

Аналогично определяется и интеграл (собственный, несобственный или в смысле главного значения) от функции $w = u + iv$:

$$\int_a^b w(t)\,dt = \int_a^b u(t)\,dt + i\int_a^b v(t)\,dt, \quad -\infty \leqslant a < b \leqslant +\infty.$$

(С несобственными интегралами такого вида по конечному отрезку мы уже встречались в п. 55.10.) При этом функция w называется абсолютно интегрируемой, если абсолютно интегрируемы функции u и v.

Очевидно, что ряд свойств интегралов от вещественных функций (линейность интеграла, аддитивность его по множествам и т. п.) автоматически переносятся и на комплекснозначные функции. Отметим, например, что если функция $w(x) = u(x) + iv(x)$, где $u(x)$ и $v(x)$ — интегрируемые по Риману на отрезке $[a, b]$ вещественные функции, то интеграл $\int_a^b w(x)dx$ также является пределом интегральных сумм $\sigma_\tau = \sum_{i=1}^{k} w(\xi_i)\Delta x_i$ ($\tau = \{x_i\}_{i=0}^{i=k}$ — разбиение отрезка $[a, b]$, $x_{i-1} \leqslant \xi_i \leqslant x_i$, $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$, $i = 1, 2, \ldots, k$). Отсюда, как и для вещественных функций, следует, что в этом случае функция $|w(x)|$ также интегрируема по Риману и что выполняется неравенство

$$\left|\int_a^b w(x)\,dx\right| \leqslant \int_a^b |w(x)|\,dx.$$

Предельным переходом справедливость этого неравенства устанавливается и для абсолютно интегрируемых комплекснозначных функций.

Вернемся к формуле Фурье. В силу нечетности по y подынтегральной функции в интеграле (56.16) имеем, согласно сделанному определению,

$$v.p. \int_{-\infty}^{+\infty} dy \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \sin y(x-t)\, dt = 0. \tag{56.17}$$

Помножая этот интеграл на $\frac{i}{2\pi}$ и складывая с интегралом (56.14), получим

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} dy \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, e^{iy(x-t)} dt, \tag{56.18}$$

где внешний интеграл понимается в смысле главного значения.

Если положить

$$\Phi(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, e^{-iyt}\, dt, \tag{56.19}$$

то формула (56.18) примет вид

$$f(x) = v.p. \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(y)\, e^{ixy} dy. \tag{56.20}$$

Определение 3. *Функция Φ, которая ставится в соответствие функции f формулой*

$$\Phi(y) = v.p. \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, e^{-iyt} dt, \tag{56.21}$$

называется преобразованием Фурье функции f и обозначается $F[f]$ или $\widehat{f}$.

В этом определении $f(t)$, вообще говоря, комплекснозначная функция вещественного аргумента. Отметим, что функция $\Phi = F[f]$ может принимать существенно комплексные значения и в том случае, когда функция f принимает только вещественные значения.

Преобразование Фурье определено, в частности, для всех абсолютно интегрируемых функций.

Определение 4. *Функция Φ, которая ставится в соответствие функции f формулой*

$$\Phi(y) = v.p. \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, e^{iyt} dt, \tag{56.22}$$

называется обратным преобразованием Фурье функции f и обозначается $F^{-1}[f]$.

Относительно обратного преобразования Фурье справедливы замечания, аналогичные тем, которые были сделаны после определе-

ния преобразования Фурье. Сам термин «обратное преобразование Фурье» оправдывается тем, что преобразование F^{-1} обращает преобразование Фурье F. Более точно, справедлива следующая лемма.

Лемма 1. *Пусть непрерывная абсолютно интегрируемая на всей оси функция f имеет в каждой точке конечные односторонние производные, тогда*

$$F^{-1}[F[f]] = F[F^{-1}[f]] = f.$$

Доказательство. Первая формула обращения, т. е. формула $F^{-1}[F[f]] = f$, является просто другой записью уже доказанной формулы (56.18).

Покажем справедливость второй формулы обращения. Поскольку косинус — четная функция, то в (56.14) можно переставить местами t и x:

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} dy \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cos y(t-x)\, dt,$$

в силу же нечетности синуса (срав. (56.17))

$$v.p. \int\limits_{-\infty}^{+\infty} dy \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t) \sin y(t-x)\, dt = 0.$$

Поэтому наряду с формулой (56.18) имеем также

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} dy \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{iy(t-x)} dt,$$

или

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{ity} dt \right] e^{-ixy} dy,$$

где внешний интеграл понимается в смысле главного значения. Эта формула может быть переписана в виде

$$F[F^{-1}[f]] = f.$$

Лемма доказана.

Лемма 2. *Пусть для функций f_1 и f_2 существует преобразование Фурье (соответственно, обратное преобразование Фурье), тогда, каковы бы ни были числа λ_1 и λ_2, существует преобразование Фурье (соответственно, обратное преобразование Фурье) и для функции $\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2$, причем*

$$F[\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2] = \lambda_1 F[f_1] + \lambda_2 F[f_2]$$

(соответственно $F^{-1}[\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2] = \lambda_1 F^{-1}[f_1] + \lambda_2 F^{-1}[f_2]$*).*

Это свойство называется *линейностью преобразования Фурье*, (соответственно обратного преобразования Фурье). Оно непосредственно следует из формул (56.21) и (56.22).

Следствие. $F[0]=F^{-1}[0]=0$.

Например, $F[0]=F[0\cdot 0]=0\cdot F[0]=0$.

Лемма 3. *Преобразование Фурье, так же как и обратное преобразование Фурье, является взаимно однозначным преобразованием на множестве непрерывных абсолютно интегрируемых на всей оси функций, имеющих в каждой точке односторонние производные.*

Это означает, что если f_1 и f_2 — две функции указанного типа и если $F[f_1]=F[f_2]$ (соответственно, если $F^{-1}[f_1]=F^{-1}[f_2]$), то $f_1\equiv f_2$ на всей оси.

Доказательство. Пусть $F[f_1]=F[f_2]$. Тогда в силу линейности преобразования Фурье $F[f_1-f_2]=0$. Поэтому по линейности F^{-1} и $F^{-1}\left[F[f_1-f_2]\right]=0$. Но, согласно лемме 1, $F^{-1}\left[F[f_1-f_2]\right]=f_1-f_2$. Следовательно, $f_1=f_2$. Аналогично доказывается взаимная однозначность обратного преобразования Фурье.

56.3. Свойства преобразования Фурье абсолютно интегрируемых функций

В этом и следующих пунктах будут рассмотрены некоторые свойства преобразования Фурье функции f, которое, как и выше, будет обозначаться $\widehat{f}$ или $F[f]$. При этом будет предполагаться, что функция f принимает, вообще говоря, комплексные значения.

Лемма 4. *Если функция f абсолютно интегрируема на всей вещественной оси, то ее преобразование Фурье $\widehat{f}(y)$ ограничено на всей оси, причем*

$$|\widehat{f}(y)|\leqslant\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}|f(x)|\,dx. \tag{56.23}$$

Следствие. *Если последовательность абсолютно интегрируемых функций $f_n(x)$, $n=1, 2, \dots$, и абсолютно интегрируемая функция $f(x)$ таковы, что*

$$\lim_{n\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty}|f_n(x)-f(x)|\,dx=0,$$

то последовательность $\{\widehat{f_n}(y)\}$ равномерно на всей оси сходится к функции $\widehat{f}(y)$.

Доказательство. Неравенство (56.23) следует из формулы

$$\widehat{f}(y)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\,e^{-ixy}\,dy, \tag{56.24}$$

если только вспомнить, что $|e^{-ixy}|=1$.

Лемма доказана.

Следствие сразу вытекает из неравенства (56.23).

Лемма 5. *Если функция f абсолютно интегрируема на всей вещественной оси, то ее преобразование Фурье $\widehat{f(y)}$ непрерывно и*

$$\lim_{y\to\pm\infty}\widehat{f}(y)=0. \tag{56.25}$$

Доказательство. Пусть $f(x)=u(x)+iv(x)$, где $u(x)$ и $v(x)$ — вещественные абсолютно интегрируемые функции. Поскольку $\widehat{f}(x)=\widehat{u}(x)+\widehat{iv}(x)$, то для доказательства непрерывности функции $\widehat{f}(y)$ достаточно доказать непрерывность функций $\widehat{u}(x)$ и $\widehat{v}(x)$.

Согласно лемме из п. 55.2, для любой вещественной абсолютно интегрируемой на всей оси функции $\varphi(x)$ существует последовательность ступенчатых функций $\varphi_n(x)$, $n=1, 2, \ldots$, таких, что

$$\lim_{n\to\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}|\varphi_n(x)-\varphi(x)|\,dx=0.$$

В силу следствия леммы 4 последовательность $\{\widehat{\varphi}_n(y)\}$ равномерно сходится к функции $\widehat{\varphi}(y)$. Для того чтобы убедиться в непрерывности функции $\widehat{\varphi}(y)$, достаточно доказать, что функции $\widehat{\varphi}_n(y)$ непрерывны (см. теорему 6′ в п. 36.3). Покажем это. Каждая ступенчатая функция является линейной комбинацией одноступенчатых (см. п. 55.2). Поэтому в силу линейности преобразования Фурье непрерывность $\widehat{\varphi}_n(y)$ будет доказана, если мы покажем, что для любой одноступенчатой функции ее преобразование Фурье непрерывно.

Пусть $\omega(x)=1$, если $a\leqslant x<b$, и $\omega(x)=0$, если $x<a$ или $x\geqslant b$, т. е. $\omega(x)$—одноступенчатая функция. Тогда в силу (56.24) имеем

$$\widehat{\omega}(y)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_a^b e^{-ixy}dx=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_a^b(\cos xy-i\sin xy)\,dx=$$
$$=\frac{(\sin by-\sin ay)+i(\cos by-\cos ay)}{y\sqrt{2\pi}}.$$

Правая часть этого равенства является непрерывной функцией $\left(\text{если считать ее при } y=0 \text{ равной } \dfrac{b-a}{\sqrt{2\pi}}\right)$. Следовательно, функция $\widehat{\varphi}(y)$ непрерывна.

Из доказанного следует, что функции $\widehat{u}(x)$ и $\widehat{v}(x)$, а значит, и функция $\widehat{f}(y)=\widehat{u}(y)+\widehat{iv}(y)$ непрерывны.

Равенство (56.25) следует из теоремы 2 п. 55.2. Действительно,

$$\widehat{f}(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left[\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\cos xy\,dy - i\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\sin xy\,dx\right],$$

где в силу указанной теоремы вещественная и мнимая части, а следовательно, и сама функция $\widehat{f}(y)$ стремятся к нулю при $y \to \pm\infty$.

Лемма доказана.

56.4. Преобразование Фурье производных

Теорема 2. *Пусть абсолютно интегрируемая функция f имеет n абсолютно интегрируемых и непрерывных на всей оси производных, тогда*

$$F[f^{(k)}] = (iy)^k F[f],\ k = 0, 1, \ldots, n, \tag{56.26}$$

и существует постоянная $M > 0$, такая, что

$$|F[f]| \leqslant \frac{M}{|y^n|}. \tag{56.27}$$

Доказательство. Пусть сначала функция f вещественна. Если f абсолютно интегрируема на всей оси вместе со своей производной f' и эта производная непрерывна, то из формулы

$$f(x) = f(0) + \int_0^x f'(t)\,dt$$

в силу интегрируемости f' следует, что существуют пределы $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)$, причем из интегрируемости самой функции f, очевидно, следует, что эти пределы равны нулю.

Интегрируя по частям формулу преобразования Фурье, получим

$$F[f'] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} f'(x)e^{-ixy}dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} f(x)e^{-ixy}\Big|_{-\infty}^{+\infty} + \frac{iy}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-ixy}\,dx = iyF[f].$$

Таким образом, дифференцирование функции приводит к умножению ее преобразования Фурье на множитель iy.

Если теперь $f = u + iv$, где u и v — вещественные функции, и снова f абсолютно интегрируема вместе со своей производной $f' = u' + iv'$ и эта производная непрерывна, то

$$F[f'] = F[u' + iv'] = F[v'] + iF[v'] = iyF[u] - yF[v] =$$
$$= iyF[u + iv] = iyF[f].$$

Формула (56.26) при $n = 1$ доказана.

Для произвольного n она получается отсюда по индукции.

Функция $F[f^{(n)}]$ является ограниченной функцией (см. лемму 4), поэтому верхняя грань $M = \sup\limits_{-\infty < y < +\infty} |F[f^{(n)}]|$ конечна и, следовательно, оценка (56.27) следует из формулы (56.26) при $k = n$.

Теорема доказана.

Итак, чем больше имеет абсолютно интегрируемых производных функция f, тем быстрее стремится к нулю на бесконечности ее преобразование Фурье.

56.5. Свертка и преобразование Фурье

Пусть функции φ и ψ определены на всей действительной оси. В различных вопросах математики часто используется так называемая *свертка* $\varphi * \psi$ *функций*, которая определяется равенством

$$(\varphi * \psi)(x) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \varphi(t)\psi(x - t)\,dt^{*)}. \qquad (56.28)$$

Для простоты в этом пункте будем предполагать, что рассматриваемые функции $\varphi(t)$, $\psi(t)$, $\chi(t)$ — вещественны.

Интеграл (56.28) заведомо существует, если обе функции ограничены и абсолютно интегрируемы**).

При этом интеграл (56.28) и более того интеграл

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} |\varphi(t)\psi(x - t)|\,dt$$

равномерно сходится на всей действительной оси. В самом деле, в силу ограниченности функции ψ имеем $|\psi| \leqslant M$, где M — постоянная, поэтому для всех x и t

$$|\varphi(t)\psi(x - t)| \leqslant M|\varphi(t)|$$

---

*) Через $(\varphi * \psi)(x)$ обозначается значение функции $\varphi * \psi$ в точке x.

**) Существование интеграла (56.28) можно гарантировать и при более общих условиях, однако мы на этом не будем останавливаться.

и данное утверждение, в силу абсолютной интегрируемости функции φ, вытекает из признака Вейерштрасса равномерной сходимости (см. п. 36.2). Из приведенных рассуждений следует также, что если функции φ и ψ ограничены, абсолютно интегрируемы и непрерывны, то и их свертка f также непрерывна, ограничена и абсолютно интегрируема. Действительно, непрерывность функции f следует из равномерной сходимости интеграла (56.28), ограниченность — из оценки

$$|(\varphi * \psi)(x)| \leqslant \int_{-\infty}^{+\infty} |\varphi(t)\psi(x-t)|\,dt \leqslant M \int_{-\infty}^{+\infty} |\varphi(t)|\,dt.$$

Докажем абсолютную интегрируемость свертки. Пусть $f = \varphi * \psi$;

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty} dx \left| \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(t)\psi(x-t)\,dt \right| \leqslant \int_{-\infty}^{+\infty} dx \int_{-\infty}^{+\infty} |\varphi(t)\psi(x-t)|\,dt =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} |\varphi(t)|\,dt \int_{-\infty}^{+\infty} |\psi(x-t)|\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty} |\varphi(t)|\,dt \int_{-\infty}^{+\infty} |\psi(s)|\,ds. \qquad (56.29)$$

Перестановка порядка интегрирования здесь возможна в силу того (см. теорему 5 п. 54.2), что интеграл $\int_{-\infty}^{+\infty} |\varphi(t)\psi(x-t)|\,dt$ равномерно сходится на всей оси, интеграл $\int_{-\infty}^{+\infty} |\varphi(t)\psi(x-t)|\,dx = |\varphi(t)| \int_{-\infty}^{+\infty} |\psi(x-t)|\,dx$ равномерно сходится на любом конечном отрезке (почему?), а повторный интеграл $\int_{-\infty}^{+\infty} dx \int_{-\infty}^{+\infty} |\varphi(t)\psi(x-t)|\,dt$, как это следует из неравенства (56.29), существует.

Таким образом, при сделанных предположениях к функции $f = \varphi * \psi$ можно в свою очередь применять операцию свертки с некоторой непрерывной ограниченной и абсолютно интегрируемой функцией (причем снова получится функция того же класса) или преобразование Фурье.

Операция свертки функций *коммутативна и ассоциативна* в рассматриваемом классе функций. Действительно, делая в интеграле (56.28) замену переменного $x - t = s$, получим

$$\varphi * \psi = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(t)\psi(x-t)\,dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x-s)\psi(s)\,ds = \psi * \varphi.$$

Далее, производя в ниже написанном интеграле замену переменного $t=y-\xi$, меняя порядок интегрирования и делая замену $x-y+\xi=\eta$, получим

$$(\varphi*\psi)*\chi=\int_{-\infty}^{+\infty}\chi(y-x)\,dx\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(t)\,\psi(x-t)\,dt=$$
$$=\int_{-\infty}^{+\infty}\chi(y-x)\,dx\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(y-\xi)\,\psi(x-y+\xi)\,d\xi=$$
$$=\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(y-\xi)\,d\xi\int_{-\infty}^{+\infty}\psi(x-y+\xi)\,\chi(y-x)\,dx=$$
$$=\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(y-\xi)\,d\xi\int_{-\infty}^{+\infty}\psi(\eta)\,\chi(\xi-\eta)\,d\eta=(\psi*\chi)*\varphi=\varphi*(\psi*\chi).$$

Возможность перестановки порядка интегрирования и в этом случае следует из теоремы 5 п. 54.2. Действительно, исследуем на равномерную сходимость интегралы

$$\chi(y-x)\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(y-\xi)\,\psi(x-y+\xi)\,d\xi, \tag{56.30}$$

$$\varphi(y-\xi)\int_{-\infty}^{+\infty}\psi(x-y+\xi)\,\chi(y-x)\,dx. \tag{56.31}$$

В силу ограниченности функций ψ и χ имеем $|\psi|\leqslant M, |\chi|\leqslant M$, где M — постоянная, и поэтому

$$|\chi(y-x)\,\varphi(y-\xi)\,\psi(x-y+\xi)|\leqslant M^2|\varphi(y-\xi)|,$$
$$|\varphi(y-\xi)\,\psi(x-y+\xi)\,\chi(y-x)|\leqslant M^2|\chi(y-x)|;$$

из этих неравенств и абсолютной интегрируемости функций φ и χ следует, что интегралы (56.30) и (56.31) равномерно сходятся на любом конечном отрезке (почему?). Наконец, существует повторный интеграл

$$\int_{-\infty}^{+\infty}dx\int_{-\infty}^{+\infty}|\chi(y-x)\,\varphi(y-\xi)\,\psi(x-y+\xi)|\,d\xi=(|\varphi|*|\psi|)*|\chi|.$$

Таким образом, все условия указанной теоремы 5 из п. 54.2 выполнены.

Следует заметить, что при рассмотрении сверток функций можно существенно ослабить ограничения, накладываемые на свертываемые функции: отбросить требования их ограниченности и непрерывности,

а оставить только требование абсолютной интегрируемости. Однако доказательство свойств сверток только при одном этом предположении потребовало бы прежде всего более тонких теорем о перемене порядка интегрирования. Для простоты изложения мы не стали этого делать.

Займемся теперь изучением преобразования Фурье сверток двух функций. Для удобства видоизменим определение свертки $\varphi * \psi$, добавив дополнительный множитель $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$:

$$\varphi * \psi = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(t) \psi(x-t)\, dt.$$

Теорема 3. *Пусть функции φ и ψ ограничены, непрерывны и абсолютно интегрируемы на вещественной оси, тогда*

$$F[\varphi * \psi] = F[\varphi] F[\psi].$$

Доказательство. Функции φ и ψ ограничены, непрерывны и абсолютно интегрируемы, поэтому функция $\varphi * \psi$ обладает теми же свойствами, в частности, абсолютно интегрируема и для нее можно рассматривать преобразование Фурье

$$F[\varphi * \psi] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ixy} dx \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(t) \psi(x-t)\, dt.$$

Меняя здесь порядок интегрирования (что возможно здесь в силу теоремы 5 п. 54.2) и производя замену переменного $x = t + s$, получим

$$F[\varphi * \psi] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(t)\, dt \int_{-\infty}^{+\infty} \psi(x-t) e^{-ixy} dx =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(t) e^{-ity}\, dt \, \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \psi(s) e^{-isy} ds = F[\varphi] F[\psi],$$

т. е. преобразование Фурье свертки двух функций равно произведению преобразований Фурье этих функций.

Теорема доказана.

Теорема 3 также может быть доказана при более слабых ограничениях на рассматриваемые функции, например, при единственном предположении их абсолютной интегрируемости.

56.6. Производная преобразования Фурье функции

Теорема 4. *Если функции $f(x)$, $xf(x)$, ..., $x^n f(x)$ абсолютно интегрируемы на всей вещественной оси, то преобразование Фурье функции f является n раз дифференцируемой функцией и*

$$i^k F^{(k)}[f] = F[x^k f], \quad k = 0, 1, \ldots, n.$$

Доказательство. Пусть сначала f вещественная функция. Формально дифференцируя по параметру интеграл

$$F[f] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-ixy}\, dx$$

и замечая, что $|xf(x) e^{-ixy}| = |xf(x)|$, получим абсолютно и равномерно сходящийся интеграл

$$-i \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x) e^{-ixy} dx, \quad -\infty < y < +\infty.$$

Следовательно (см. п. 54.2, теорема 6), в этом случае преобразование Фурье $F[f]$ функции f является дифференцируемой функцией и

$$iF'[f] = F[xf].$$

Если теперь $f = u + iv$, где u и v — вещественные функции, то

$$F'[f] = F'[u + iv] = \{F[u] + iF[v]\}' = F'[u] + iF'[v] =$$
$$= -iF[xu] + F[xv] = -iF[xu + ixv] = -iF[xf].$$

Далее по индукции получаем, что преобразование Фурье $F[f]$ функции f имеет производные до порядка n включительно и

$$i^k F^{(k)}[f] = F[x^k f], \quad k = 0, 1, \ldots, n.$$

Теорема доказана.

Следствие. *В предположениях теоремы все производные $F^{(k)}[f]$, $k = 0, 1, \ldots, n$ непрерывны и стремятся к нулю при стремлении их аргумента к бесконечности.*

В силу леммы 4 следствие непосредственно вытекает из того, что производные $F^{(k)}[f]$ являются преобразованием Фурье абсолютно интегрируемых функций.

Можно показать, что если абсолютно интегрируемыми оказываются произведения вида $e^{a|x|^\alpha} f(x)$, при тех или иных ограничениях на $a > 0$ и $\alpha > 0$, то это приводит к еще большей гладкости преобразования Фурье, а именно оказывается, что оно принадлежит к тем или иным классам аналитических функций.

§ 57. ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ ПРОСТРАНСТВА

57.1. Метрические пространства

Определение 1. *Множество элементов* $\{x, y, z, \ldots\}$ *называется метрическим пространством* R, *если на множестве упорядоченных пар* (x, y) *элементов этого множества определена неотрицательная вещественная функция* $\rho(x, y)$, *называемая расстоянием (или метрикой), такая, что:*

1) $\rho(x, y) = 0$ *тогда и только тогда, когда* $x = y$;
2) $\rho(x, y) = \rho(y, x)$ $x \in R$, $y \in R$;
3) $\rho(x, y) \leqslant \rho(x, z) + \rho(z, y)$, $x \in R$, $y \in R$, $z \in R$.

Условия 1, 2 и 3 называются *аксиомами расстояния.*

Элементы метрического пространства называются *точками.*

Примеры. 1. Совокупность вещественных чисел, а также совокупность комплексных чисел образуют метрическое пространство, если в них определить расстояние по формуле $\rho(x, y) = |x - y|$.

2. Пусть E — некоторое множество. Рассмотрим множество ограниченных на E функций, принимающих действительные (или комплексные) значения. Для двух таких функций φ и ψ положим

$$\rho(\varphi, \psi) = \sup_{t \in E} |\varphi(t) - \psi(t)|. \tag{57.1}$$

Легко проверяется, что функция $\rho(\varphi, \psi)$ является метрикой. Справедливость свойств расстояния 1 и 2 ясна непосредственно. Проверим справедливость свойства 3. Пусть φ, ψ и χ — ограниченные функции, определенные на множестве E. Для любого элемента $t \in E$ имеем

$$|\varphi(t) - \chi(t)| = |[\varphi(t) - \psi(t)] + [\psi(t) - \chi(t)]| \leqslant$$
$$\leqslant |\varphi(t) - \psi(t)| + |\psi(t) - \chi(t)|,$$

поэтому

$$|\varphi(t) - \chi(t)| \leqslant \sup_E |\varphi(t) - \psi(t)| + \sup_E |\psi(t) - \chi(t)|,$$

откуда

$$\sup_E |\varphi(t) - \chi(t)| \leqslant \sup_E |\varphi(t) - \psi(t)| + \sup_E |(t) - \chi(t)|,$$

т. е.

$$\rho(\varphi, \chi) = \rho(\varphi, \psi) - \rho(\psi, \chi).$$

Всякое подмножество метрического пространства R в свою очередь является метрическим пространством и называется *подпространством пространства* R.

Определение 2. *Два метрических пространства* R *и* R' *называются изометричными, если между их точками суще-*

ствует взаимно однозначное соответствие f, сохраняющее расстояние между точками, т. е. такое что, если

$$x' = f(x),\ y' = f(y),\ x \in R,\ y \in R,\ x' \in R',\ y' \in R',$$

то $\rho(x, y) = \rho(x', y')$ (такие соответствия также называются изометрическими).

Определение 3. *Пусть R — метрическое пространство; последовательность его точек $\{x_n\}$ называется сходящейся к точке $x \in R$, если $\lim\limits_{n \to \infty} \rho(x, x_n) = 0$, т. е. если для любого числа $\varepsilon > 0$ существует такой номер n_ε, что для всех номеров $n \geqslant n_\varepsilon$ выполняется неравенство $\rho(x, x_n) < \varepsilon$. В этом случае пишется $x = \lim\limits_{n \to \infty} x_n$ и говорится, что точка x является пределом данной последовательности.*

Например, в метрическом пространстве функций, определенных и ограниченных на некотором множестве, расстояние между которыми определяется формулой (57.1), последовательность функций $\{\varphi_n\}$ сходится к функции φ, если

$$\lim_{n \to \infty} \sup_{t \in E} |\varphi(t) - \varphi_n(t)| = 0,$$

т. е. если последовательность $\{\varphi_n\}$ равномерно на множестве E сходится к функции φ (см. т. I п. 36.2).

Упражнение 1. Множество E метрического пространства R называется *ограниченным*, если

$$d = \sup_{x \in E,\ y \in E} \rho(x, y) < +\infty$$

(величина d называется *диаметром* множества E). Доказать, что всякая сходящаяся последовательность ограничена.

Определение 4. *Последовательность $\{x_n\}$ точек метрического пространства R называется фундаментальной, если для любого числа $\varepsilon > 0$ существует такой номер n_ε, что для всех номеров $n \geqslant n_\varepsilon$ и $m \geqslant n_\varepsilon$ выполняется неравенство*

$$\rho(x_n, x_m) < \varepsilon.$$

Лемма 1. *Если последовательность $\{x_n\}$ сходится, то она фундаментальная.*

Доказательство. Пусть $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = x$, тогда для любого числа $\varepsilon > 0$ существует такой номер n_ε, что для всех номеров $n \geqslant n_\varepsilon$ справедливо неравенство

$$\rho(x, x_n) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Следовательно, если $n \geqslant n_\varepsilon$ и $m \geqslant n_\varepsilon$, то

$$\rho(x_n, x_m) \leqslant \rho(x_n, x) + \rho(x, x_m) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon.$$

Лемма доказана.

Определение 5. *Метрическое пространство R называется полным, если всякая его фундаментальная последовательность является сходящейся.*

Примеры. 1. Метрические пространства вещественных и комплексных чисел являются примерами полных метрических пространств. Полным является и n-мерное евклидово пространство E^n (см. п. 18.1). Рациональные числа дают пример неполного метрического пространства.

2. Рассмотрим метрическое пространство функций, определенных и ограниченных на множестве E, расстояние между которыми определено формулой (57.1). В этом пространстве последовательность функций φ_n, $n = 1, 2, \ldots$, является фундаментальной, если для любого числа $\varepsilon > 0$ существует такой номер n_ε, что для всех номеров $n \geqslant n_\varepsilon$ и $m \geqslant m_\varepsilon$ выполняется неравенство

$$\rho(\varphi_n, \varphi_m) = \sup_E |\varphi_n(x) - \varphi_m(x)| < \varepsilon,$$

т. е. если последовательность $\{\varphi_n\}$ удовлетворяет критерию Коши равномерной сходимости последовательности на множестве E (см. п. 36.2). В силу этого критерия последовательность $\{\varphi_n\}$ равномерно на множестве E сходится к некоторой функции φ, т. е.

$$\lim_{n\to\infty} \sup_E |\varphi(x) - \varphi_n(x)| = 0. \tag{57.2}$$

Покажем, что эта функция φ также ограничена и, следовательно, принадлежит рассматриваемому пространству. Действительно, в силу (57.2) для любого числа $\varepsilon > 0$, в частности для $\varepsilon = 1$, существует такой номер n_1, что

$$|\varphi(x) - \varphi_n(x)| < 1, \ x \in E,$$

для всех $n \geqslant n_1$, поэтому

$$|\varphi(x)| \leqslant |\varphi(x) - \varphi_{n_1}(x)| + |\varphi_{n_1}(x)| < 1 + \sup_E |\varphi_{n_1}(x)|.$$

Так как функция φ_{n_1} ограничена, то ограничена и функция φ.

Мы доказали тем самым, что рассматриваемое пространство функций является полным.

Для всякого метрического пространства R естественным образом вводится понятие ε-окрестности $O(x, \varepsilon)$ точки $x \in R$, $\varepsilon > 0$:

$$O(x, \varepsilon) = \{y : y \in R, \ \rho(y, x) < \varepsilon\},$$

а затем дословно, так же как для n-мерного пространства E^n (см. т. I, п. 18.2), вводятся понятия точки прикосновения множества, предельной и изолированной точки множества, граничной точки множества, замыкания $\overline{A}$ множества A, понятие замкнутого и открытого множества.

Справедливы для произвольных метрических пространств и леммы 1, 2 и 3, доказанные в п. 18.2 для открытых и замкнутых множеств n-мерных евклидовых пространств, причем доказательства, приведенные в п. 18.2, сохраняют свою силу и в общем случае.

Определение 6. *Множество A метрического пространства R называется плотным в множестве B этого пространства, если $A \subset B$ и $\overline{A} = B$.*

Например, множество рациональных чисел плотно в множестве вещественных чисел.

Определение 7. *Полное метрическое пространство R^* называется пополнением метрического пространства R, если в пространстве R^* существует плотное в нем подмножество R', изометричное пространству R.*

Иногда бывает удобно отождествить элементы пространств R и R', соответствующие друг другу при изометрическом соответствии пространств R и R', и тем самым рассматривать множество R как подмножество его пополнения R^*.

Пример. Множество вещественных чисел является пополнением множества рациональных чисел.

Теорема 1. *Для всякого метрического пространства существует его пополнение.*

Доказательство.

I. Конструкция пополнения R^* заданного метрического пространства R

Две последовательности $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ элементов пространства R назовем *эквивалентными*, если

$$\lim_{n\to\infty} \rho(x_n, y_n) = 0. \tag{57.3}$$

Множество всевозможных фундаментальных последовательностей пространства R распадается на непересекающиеся классы эквивалентных между собой последовательностей. Обозначим эти классы через $x^*, y^*, z^*, \ldots$, а их совокупность — через R^*. Если фундаментальная последовательность $\{x_n\}$ содержится в классе x^*, то будем, как обычно, это записывать следующим образом: $\{x_n\} \in x^*$.

II. Определение расстояния $\rho(x^*, y^*)$ в R^*

Пусть $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ — две фундаментальные последовательности метрического пространства R, тогда числовая последовательность

$\rho(x_n, y_n)$ также фундаментальная, т. е. удовлетворяет условию Коши (см. п. 3.2). Действительно, для любых номеров n и m

$$\rho(x_n, y_n) \leqslant \rho(x_n, x_m) + \rho(x_m, y_m) + \rho(y_m, y_n)$$

и, следовательно, в силу симметрии индексов n и m

$$|\rho(x_n, y_n) - \rho(x_m, y_m)| \leqslant \rho(x_n, x_m) + \rho(y_n, y_m). \qquad (57.4)$$

Из фундаментальности последовательностей $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ следует, что для любого числа $\varepsilon > 0$ существует такой номер n_ε, что для всех номеров $n \geqslant n_\varepsilon$ и $m \geqslant n_\varepsilon$ выполняются неравенства

$$\rho(x_n, x_m) < \frac{\varepsilon}{2}, \ \rho(y_n, y_m) < \frac{\varepsilon}{2}. \qquad (57.5)$$

Из (57.4) и (57.5) для $n \geqslant n_\varepsilon$ и $m \geqslant n_\varepsilon$ получаем

$$|\rho(x_n, y_n) - \rho(x_m, y_m)| < \varepsilon.$$

Следовательно, числовая последовательность $\{\rho(x_n, y_n)\}$ является фундаментальной, т. е. удовлетворяет условию Коши и, следовательно, сходится.

Пусть $\{x_n\} \in x^*$, $\{y_n\} \in y^*$. Положим по определению $\rho(x^*, y^*) = \lim\limits_{n \to \infty} \rho(x_n, y_n)$. В силу доказанного указанный предел существует. Покажем, что так определенная функция $\rho(x^*, y^*)$ не зависит от выбора фундаментальных последовательностей $\{x_n\} \in x^*$ и $\{y_n\} \in y^*$ и удовлетворяет аксиомам расстояния.

Пусть $\{x_n\} \in x^*$, $\{x_n'\} \in x^*$, $\{y_n\} \in y^*$, $\{y_n'\} \in y^*$, тогда

$$\rho(x_n, y_n) \leqslant \rho(x_n, x_n') + \rho(x_n', y_n') + \rho(y_n, y_n')$$

и

$$|\rho(x_n, y_n) - \rho(x_n', y_n')| \leqslant \rho(x_n, x_n') + \rho(y_n, y_n').$$

В силу эквивалентности последовательностей $\{x_n\}$, $\{x_n'\}$ и соответственно — $\{y_n\}$, $\{y_n'\}$ получим

$$\lim_{n \to \infty} \rho(x_n, x_n') = \lim_{n \to \infty} \rho(y_n, y_n') = 0$$

и, следовательно,

$$\lim_{n \to \infty} \rho(x_n, y_n) = \lim_{n \to \infty} \rho(x_n', y_n').$$

III. Проверка аксиом расстояния для $\rho(x^*, y^*)$

Пусть $\{x_n\} \in x^*$, $\{y_n\} \in y^*$, $\{z_n\} \in z^*$. Если $\rho(x^*, y^*) = 0$, то $\lim\limits_{n \to \infty} \rho(x_n, y_n) = 0$, т. е. последовательности $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ эквивалент-

ны, что означает совпадение элементов x^* и $y^*: x^* = y^*$. Из равенства $\rho(x_n, y_n) = \rho(y_n, x_n)$ в пределе получаем $\rho(x^*, y^*) = \rho(y^*, x^*)$, а из неравенства $\rho(x_n, y_n) \leqslant \rho(x_n, z_n) + \rho(z_n, y_n)$ получаем неравенство

$$\rho(x^*, y^*) \leqslant \rho(x^*, z^*) + \rho(z^*, y^*).$$

Итак, R^* является метрическим пространством.

IV. Построение подпространства пространства R^* изометричного пространству R

Пусть $x \in R$. Последовательность $x_n = x$, $n = 1, 2, \ldots$, очевидно, фундаментальная. Поставим в соответствие точке $x \in R$ точку $x^* \in R^*$, такую, что $\{x\} \in x^*$. Если при указанном соответствии точке x соответствует точка x^*, а точке y — точка y^*, то, очевидно, при $x \neq y$ и $x^* \neq y^*$, причем $\rho(x^*, y^*) = \lim \rho(x, y) = \rho(x, y)$, т. е. указанное соответствие осуществляет взаимно однозначное изометрическое соответствие между пространством R и некоторым подмножеством R' пространства R^*.

Точку x^* пространства R^*, соответствующую при рассматриваемом соответствии точке $x \in R$, мы будем для простоты обозначать также через x, а пространство R' через R. Можно считать, что мы просто отождествили соответствующие точки пространства R и R' (см. замечание после определения 7). В этих обозначениях имеем

$$R \subset R^*.$$

V. Доказательство плотности R в R^*

Покажем, что каждая точка x^* пространства R^* является точкой прикосновения множества R. Для этого достаточно показать, что для любой точки $x^* \in R^*$ существует последовательность $x_n \in R$, $n = 1, 2, \ldots$, сходящаяся к x^*.

Пусть $x^* \in R^*$ и $\{x_n\} \in x^*$, $x_n \in R$. Точку пространства R^*, содержащую фундаментальную последовательность, все члены которой равны одной и той же точке x_n, будем обозначать, согласно сделанному выше соглашению, также через x_n. Докажем, что последовательность $\{x_n\}$, $x_n \in R^*$, сходится к точке $x^* \in R^*$.

Пусть фиксировано число $\varepsilon > 0$. Из фундаментальности последовательности $\{x_n\}$ следует, что существует такой номер n_ε, что для всех номеров $n \geqslant n_\varepsilon$ и $m \geqslant n_\varepsilon$ выполняется неравенство

$$\rho(x_m, x_n) < \varepsilon. \tag{57.6}$$

Замечая, что по определению расстояния в R^* $\rho(x^*, x_n) = \lim\limits_{m \to \infty} \rho(x_m, x_n)$, из неравенства (57.6) для $n \geqslant n_\varepsilon$ получаем неравенство

$$\rho(x^*, x_n) \leqslant \varepsilon,$$

т. е. $\lim_{n\to\infty} \rho(x^*, x_n) = 0$, что и означает, что точка x^* является точкой прикосновения множества R. Итак, $\overline{R} = R^*$.

VI. Доказательство полноты пространства R^*

Пусть $\{x_n^*\}$ — фундаментальная последовательность точек пространства R^*, пусть $x_n \in R$ и $\rho(x_n^*, x_n) < \frac{1}{n}$, $n = 1, 2, \ldots$. Такие точки x_n существуют в силу плотности R в R^*.

Последовательность $\{x_n\}$ фундаментальная. Действительно, замечая, что

$$\rho(x_n, x_m) \leqslant \rho(x_n, x_n^*) + \rho(x_n^*, x_m^*) + \\ + \rho(x_m^*, x_m) < \frac{1}{n} + \rho(x_n^*, x_m^*) + \frac{1}{m},$$

выберем номер n_ε так, чтобы $\rho(x_n^*, x_m^*) < \frac{\varepsilon}{3}$, $\frac{1}{n} < \frac{\varepsilon}{3}$, $\frac{1}{m} < \frac{\varepsilon}{3}$ для всех $n \geqslant n_\varepsilon$ и $m \geqslant n_\varepsilon$. Тогда

$$\rho(x_n, x_m) < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon \tag{57.7}$$

для всех $n \geqslant n_\varepsilon$ и $m \geqslant n_\varepsilon$, т. е. последовательность $\{x_n\}$ — фундаментальная.

Обозначим через x^* класс эквивалентных последовательностей, которому принадлежит последовательность $\{x_n\}$. Очевидно,

$$\rho(x^*, x_n^*) \leqslant \rho(x^*, x_n) + \rho(x_n, x_n^*) = \rho(x^*, x_n) + \frac{1}{n}.$$

Но из (57.7) при $m \to \infty$ и $n \geqslant n_\varepsilon$ получаем

$$\rho(x^*, x_n) = \lim_{m\to\infty} \rho(x_m, x_n) \leqslant \varepsilon.$$

Следовательно,

$$\lim_{n\to\infty} \rho(x^*, x_n) = 0,$$

а потому и

$$\lim_{n\to\infty} \rho(x^*, x_n^*) = 0.$$

Таким образом, мы доказали, что данная фундаментальная последовательность $\{x_n^*\}$ сходится в R^*. Полнота R^* доказана.

Теорема доказана.

Упражнение 2. Доказать, что с точностью до изометрических пространств пополнение метрического пространства единственно.

Определение 8. *Числовая функция f (вещественно- или комплекснозначная), определенная на множестве A метрического пространства R, называется непрерывной в точке $x_0 \in A$ (или, более подробно, непрерывной по множеству A в точке $x_0 \in A$), если для любого числа $\varepsilon > 0$ существует число $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, такое, что для всех точек $x \in O(x_0, \delta) \cap A$ выполняется неравенство*

$$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

Определение 9. *Функция f, определенная на множестве A метрического пространства R, называется непрерывной на множестве $B \subset A$, если она непрерывна по множеству A в каждой точке $x_0 \in B$.*

Упражнение 3. Сформулировать определение непрерывности функции f, заданной на множестве $A \subset R$, в точке x_0 с помощью понятия последовательности и доказать эквивалентность этого определения с определением 8.

Дословно, так же, как и в п. 36.3 (см. т. I), доказывается, что предел равномерно сходящейся на метрическом пространстве R последовательности непрерывных функций является непрерывной функцией.

Пример. Рассмотрим метрическое пространство ограниченных и непрерывных на некотором метрическом пространстве R функций f, расстояние между которыми определяется по формуле (57.1). Поскольку фундаментальность последовательности $\{f_n\}$ в смысле метрики (57.1) означает, что последовательность $\{f_n\}$ удовлетворяет условию Коши равномерной сходимости на множестве R, то всякая фундаментальная последовательность непрерывных функций $\{f_n\}$ равномерно сходится к некоторой функции f. Эта функция f, как отмечалось выше, непрерывна и, как было доказано несколько раньше в этом пункте, ограничена на R, т. е. принадлежит рассматриваемому пространству функций.

Таким образом, *пространство ограниченных и непрерывных на метрическом пространстве R функций является полным метрическим пространством.* Оно, очевидно, является подпространством всех ограниченных на R функций с расстоянием, определенным той же формулой (57.1).

В частности, поскольку всякая функция, непрерывная на некотором ограниченном замкнутом множестве E, лежащем в n-мерном евклидовом пространстве E^n, ограничена (см. п. 19.4), то пространство функций, непрерывных на указанном множестве $E \subset E^n$, с расстоянием, определенным по формуле (57.1), является полным.

Определение 10. *Пусть R — метрическое пространство. Функция f, определенная на множестве упорядоченных пар (x, y), где $x \in A$, $y \in B$, $A \subset R$, $B \subset R$, называется непрерывной в элементе (x_0, y_0), $x_0 \in A$, $y_0 \in B$, если для любого числа $\varepsilon > 0$ существует число*

$\delta=\delta(\varepsilon)>0$, *такое, что для всех пар* (x, y), *таких, что* $x \in O(x_0, \delta)\cap A$, $y \in O(y_0, \delta)\cap B$ *справедливо неравенство* $|f(x, y) - f(x_0, y_0)| < \varepsilon$.

Функция, непрерывная в каждом элементе (x, y) *некоторого множества пар, называется непрерывной на этом множестве.*

Приведем пример еще одного метрического пространства, элементами которого являются функции. Для двух непрерывных на отрезке $[a,b]$ функций $\varphi = \varphi(x)$ и $\psi = \psi(x)$ положим

$$\rho(\varphi, \psi) = \int_a^b |\varphi(x)-\psi(x)|\,dx. \tag{57.8}$$

Все аксиомы метрического пространства в этом случае легко проверяются (проделайте это). Полученное метрическое пространство непрерывных на отрезке $[a, b]$ функций с метрикой (57.8) не является, как это можно показать, полным. Согласно теореме 1, его можно дополнить до полного пространства.

Естественным образом аналогичное пространство вводится и для функций, определенных на бесконечном промежутке. Например, в случае $a = -\infty$, $b = +\infty$ для двух непрерывных абсолютно интегрируемых на всей числовой оси функций φ и ψ расстояние определяется по формуле

$$\rho(\varphi, \psi) = \int_{-\infty}^{+\infty} |\varphi(x)-\psi(x)|\,dx. \tag{57.9}$$

Упражнения. 4. Проверить аксиомы расстояния, определенного по формуле (57.9) для пространства абсолютно интегрируемых непрерывных на всей числовой оси функций.

5. Привести пример последовательности непрерывных функций сходящейся на некотором отрезке в смысле расстояния (57.8), но не сходящейся на этом отрезке в смысле точечной сходимости.

6. Привести пример последовательности сходящейся на некотором отрезке в смысле точечной сходимости, но не сходящейся на этом отрезке в смысле расстояния (57.8).

7. Доказать, что пространство непрерывных на отрезке $[a, b]$ функций, расстояние между которыми определяется по формуле (57.8), не является полным.

57.2. Линейные пространства

Определение 11. *Множество элементов* $\{x, y, z, \dots\}$ *называется вещественным линейным пространством* R, *если:*

каждой упорядоченной паре (x, y) *элементов* $x \in R$ *и* $y \in R$ *поставлен в соответствие некоторый элемент пространства* R, *называемый суммой* x *и* y *и обозначаемый* $x + y$;

каждому элементу $x \in R$ *и каждому вещественному числу* λ *поставлен в соответствие элемент пространства* R, *называемый про-*

изведением λ *на* x *и обозначаемый* λx. *При этом выполняются следующие группы аксиом:*

1. а) $x+y=y+x$ *для любых* $x\in R$ *и* $y\in R$;

б) $x+(y+z)=(x+y)+z$ *для любых* $x\in R$, $y\in R$ *и* $z\in R$;

в) *в* R *существует элемент, называемый нулевым и обозначаемый* 0, *такой, что* $x+0=x$ *для любого* $x\in R$;

г) *для каждого* $x\in R$ *существует элемент, называемый обратным и обозначаемый* $-x$, *такой, что* $x+(-x)=0$;

2. а) $1\cdot x=x$ *для любого* $x\in R$;

б) $\lambda(\mu x)=(\lambda\mu)x$ *для любого* $x\in R$ *и любых вещественных чисел* λ *и* μ;

3. а) $(\lambda+\mu)x=\lambda x+\mu x$ *для любого* $x\in R$ *и любых вещественных чисел* λ *и* μ;

б) $\lambda(x+y)=\lambda x+\lambda y$ *для любых* $x\in R$, $y\in R$ *и любого вещественного числа* λ.

Для каждой пары элементов $x\in R$ и $y\in R$ элемент $x+(-y)$ называется *разностью элементов* x и y и обозначается $x-y$.

Примерами вещественных линейных пространств является множество всех вещественных чисел, а также множество всех вещественных функций, определенных на некотором множестве E, при естественном определении сложения и умножения их на число.

Если в определении 11 вещественного линейного пространства всюду вещественные числа заменить комплексными, то получится определение *комплексного линейного пространства*. Примерами комплексных линейных пространств являются множества всех комплексных чисел, а также и множество всех комплекснозначных функций, определенных на некотором множестве, при естественном определении сложения их элементов и умножения их на комплексное число.

Определение 12. *Множество* R', *содержащееся в линейном пространстве* R *(вещественном или комплексном), называется подпространством пространства* R, *если:*

1) $x+y\in R'$ *для любых* $x\in R'$ *и* $y\in R'$;

2) $\lambda x\in R'$ *для любого* $x\in R'$ *и любого числа* λ *(соответственно вещественного или комплексного).*

Очевидно, что подпространство R' линейного пространства R в свою очередь является линейным пространством. Если R — линейное пространство и $x\in R$, то совокупность всех элементов пространства R вида λx, где λ — всевозможные числа, образует пример подпространства пространства R.

Множество функций, вещественнозначных и непрерывных на некотором множестве $E\subset E^n$, является подпространством пространства всех вещественнозначных функций, определенных на этом множестве E.

Элементы линейных пространств обычно называются *точками*, или *векторами*.

Определение 13. *Конечная система векторов $x_1, \ldots, x_n$ линейного пространства R (вещественного или комплексного) называется линейно зависимой, если существуют такие числа $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ (соответственно вещественные или комплексные), не все равные нулю, что*

$$\lambda_1 x_1 + \ldots + \lambda_n x_n = 0.$$

В противоположном случае система векторов $x_1, \ldots, x_n$ называется линейно независимой.

Определение 14. *Система векторов x_α, $\alpha \in \mathfrak{A}$, ($\mathfrak{A}$ — некоторое множество индексов) линейного пространства R называется линейно независимой, если любая ее конечная подсистема $x_{\alpha_1}, x_{\alpha_2}, \ldots, x_{\alpha_n}$ линейно независима.*

Упражнения. 8. Доказать, что если система x_α, $\alpha \in \mathfrak{A}$, линейно независимая, то $x_\alpha \neq 0$ для всех $\alpha \in \mathfrak{A}$.

9. Доказать, что, для того чтобы конечная система векторов была линейно зависима, необходимо и достаточно, чтобы один из них являлся линейной комбинацией остальных.

Определение 15. *Совокупность всевозможных конечных линейных комбинаций векторов системы $\{x_\alpha, \alpha \in \mathfrak{A}\}$, т. е. совокупность всевозможных векторов вида*

$$\lambda_1 x_{\alpha_1} + \lambda_2 x_{\alpha_2} + \ldots + \lambda_k x_{\alpha_k},$$

где $x_{\alpha_j} \in \{x_\alpha, \alpha \in \mathfrak{A}\}$, а λ_j — числа, $j = 1, 2, \ldots, k$, называется линейной оболочкой системы $\{x_\alpha, \alpha \in \mathfrak{A}\}$.

Определение 16. *Если в пространстве R (вещественном или комплексном) имеется система n линейно независимых векторов, линейной оболочкой которых является пространство R, то оно называется n-мерным и обозначается R^n, а всякая система n линейно независимых векторов, линейной оболочкой которых является пространство R^n, называется базисом пространства.*

Иначе говоря, векторы $e_1, e_2, \ldots, e_n$ являются базисом пространства R^n, если:

1) векторы $e_1, e_2, \ldots, e_n$ линейно независимы;

2) для каждого $x \in R^n$ существуют такие числа $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$, что $x = \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \ldots + \lambda_n e_n$.

Упражнение 10. Доказать, что в n-мерном пространстве R^n каждая система линейно независимых векторов, линейной оболочкой которых является R^n, состоит из n векторов и обратно: каждая система из n линейно независимых векторов в n-мерном пространстве является его базисом.

Примером n-мерного вещественного пространства является пространство, точками которого являются точки n-мерного евклидова пространства (см. т. I, п. 18.1), т. е. упорядоченные комплексы n вещественных чисел. При этом сложение двух точек $x = (x_1, \ldots, x_n)$

и $y=(y_1, \ldots, y_n)$ определяется по правилу $x+y=(x_1+y_1, \ldots, x_n+y_n)$, а умножение точки x на число λ — по правилу $\lambda x=(\lambda x_1, \ldots, \lambda x_n)$. Базисом в этом пространстве являются векторы $e_i=\{\delta_1^i, \ldots, \delta_n^i\}$, где δ_j^i — так называемый символ Кронекера

$$\delta_j^i=\begin{cases}1, & \text{если } i=j,\\ 0, & \text{если } i\neq j.\end{cases}$$

Очевидно, что

$$x=(x_1, \ldots, x_n)=\sum_{i=1}^{n} x_i e_i.$$

Определение 17. *Два линейных пространства R_1 и R_2 называются изоморфными, если между их элементами существует такое взаимно однозначное соответствие $y=f(x)$, $x\in R_1$, $y\in R_2$, что $f(x+y)=f(x)+f(y)$, $f(\lambda x)=\lambda f(x)$ для любых $x\in R_1$, $y\in R_1$ и любого числа λ. Соответствие f называется в этом случае изоморфизмом пространств R_1 и R_2.*

Два изоморфных пространства могут отличаться лишь природой своих элементов, а не свойствами линейного пространства как такового; поэтому в дальнейшем часто мы не будем различать изоморфные линейные пространства.

Упражнение 11. Доказать, что все n-мерные линейные пространства изоморфны между собой.

Определение 18. *Если линейное пространство R не является n-мерным ни при каком натуральном n, то оно называется бесконечномерным.*

Если линейное пространство R бесконечномерно, то оно не имеет базиса, состоящего из конечного числа элементов. Попытка обобщить понятие базиса приводит к бесконечным суммам, т. е. к рядам вида $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\lambda_n e_n$. Для того чтобы имело смысл говорить об их сумме в пространстве R, должна быть задана какая-то метрика. Рассмотрению такого вида пространств посвящен следующий пункт.

57.3. Нормированные пространства

Определение 19. *Линейное пространство R (вещественное или комплексное) называется нормированным, если на множестве его точек определена вещественная функция, называемая нормой, обозначаемая $\|x\|$, $x\in R$, и удовлетворяющая следующим свойствам:*

1) $\|x\|\geqslant 0$, $x\in R$,
2) $\|\lambda x\|=|\lambda|\,\|x\|$, $x\in R$, λ — *число*,
3) $\|x+y\|\leqslant\|x\|+\|y\|$, $x\in R$, $y\in R$,
4) *если* $\|x\|=0$, *то* $x=0$.

Заметим, что из свойства 2 следует, что если $x = 0$, то $\|x\| = 0$. Действительно, фиксируя произвольный элемент $x \in R$, получим

$$\|0\| = \|0 \cdot x\| = 0 \|x\| = 0.$$

Определение 20. *Если на множестве точек линейного пространства R определена вещественная функция $\|x\|$, $x \in R$, удовлетворяющая только свойствам 1, 2, 3, то пространство R называется квазинормированным, а функция $\|x\|$ — квазинормой, или полунормой.*

Отметим еще, что, очевидно, всякое подпространство линейного квазинормированного (в частности, нормированного) пространства в свою очередь является линейным квазинормированным (соответственно, нормированным) пространством.

Примеры линейных нормированных и квазинормированных пространств

1. Множество вещественных и множество комплексных чисел, если за норму в них взять абсолютную величину чисел, а также линейное пространство n-мерных векторов $x = (x_1, \ldots, x_n)$ с нормой

$$\|x\| = \sqrt{x_1^2 + \ldots + x_n^2}.$$

2. Линейное пространство всех ограниченных вещественных функций, определенных на отрезке $[a, b]$ (см. п. 57.2), превращается в нормированное, если в нем ввести норму по формуле

$$\|\varphi\| = \sup_{a \leqslant t \leqslant b} |\varphi(t)|. \tag{57.10}$$

Его нормированное подпространство непрерывных на отрезке $[a, b]$ функций обозначается $C[a, b]$.

3. Линейное пространство функций, абсолютно интегрируемых (см. п. 34.4 и 33.4) на некотором отрезке $[a, b]$*). Определим квазинорму для этого пространства равенством

$$\|f\| = \int_a^b |f(x)|\, dx. \tag{57.11}$$

Это действительно квазинорма (свойства 1, 2, 3 легко проверяются), причем она не является нормой. В самом деле, рассмотрим, например, функцию

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{при } x = a, \\ 0 & \text{при } x \in (a, b]. \end{cases}$$

*) Можно взять и бесконечный промежуток, в частности всю ось.

Очевидно, $\|f\| = 0$, и так как f не равняется тождественно нулю на отрезке $[a, b]$, то она не является нулем рассматриваемого линейного пространства.

4. Пространство непрерывных на отрезке $[a, b]$ функций является подпространством предыдущего пространства. Для него квазинорма (57.11) является уже нормой. Это непосредственно вытекает из следующей леммы.

Лемма 2. *Если непрерывная, неотрицательная на отрезке* $[a, b]$ *функция* $f(x)$ *не является на нем тождественным нулем, то*

$$\int_a^b f(x)\,dx > 0. \tag{57.12}$$

Доказательство. В силу условий леммы существует такая точка $x_0 \in [a, b]$, что $f(x_0) > 0$. Поскольку функция f непрерывна в точке x_0, то найдется такое $\delta > 0$, что при $|x - x_0| < \delta$ и $x \in [a, b]$ выполняется неравенство

$$|f(x) - f(x_0)| < \frac{f(x_0)}{2}$$

и, следовательно,

$$f(x) > \frac{f(x_0)}{2}.$$

Пусть $[x_0 - \delta, x_0 + \delta] \cap [a, b] = [\alpha, \beta]$, тогда в силу неотрицательности функции f на отрезке $[a, b]$ получим

$$\int_a^b f(x)\,dx \geqslant \int_\alpha^\beta f(x)\,dx \geqslant \frac{1}{2} f(x_0)(\beta - \alpha) > 0.$$

Лемма доказана.

Возвращаясь к квазинорме (57.11), видим, что если f непрерывная функция и $\|f\| = \int_a^b |f(x)|\,dx = 0$, то, согласно лемме 2, будем иметь $f \equiv 0$ на $[a, b]$, т. е. в этом случае (57.11) является нормой.

Подобным же образом легко строятся аналогичные пространства и для функций многих переменных.

Упражнение 12. Пусть R — линейное квазинормированное пространство. Элементы $x \in R$ и $y \in R$ называются *эквивалентными*, если $\|x - y\| = 0$. Обозначим через $\widetilde{R}$ множество, элементами которого являются классы эквивалентных элементов пространства R. Пусть $\widetilde{x} \in \widetilde{R}$, $\widetilde{y} \in \widetilde{R}$, $x \in \widetilde{x}$, $y \in \widetilde{y}$, λ — число. Определим $\widetilde{x} + \widetilde{y}$ как элемент множества $\widetilde{R}$, содержащий $x + y$, а $\lambda\widetilde{x}$ — как элемент из $\widetilde{R}$, содержащий λx. Положим

$\|\tilde{x}\| = \|x\|$. Доказать, что данные определения корректны, т. е. не зависят от выбора элементов $x \in \tilde{x}$ и $y \in \tilde{y}$, и что $\tilde{R}$ является линейным пространством, а $\|\tilde{x}\|$ — нормой.

Определение 21. *Если последовательность $\{x_n\}$ элементов квазинормированного (в частности, нормированного) линейного пространства R такова, что существует элемент $x \in R$, такой, что $\lim\limits_{n\to\infty} \|x_n - x\| = 0$, то последовательность $\{x_n\}$ называется сходящейся по квазинорме (соответственно по норме) к элементу x и пишется $x = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$.*

Вводя в каком-либо линейном пространстве функций различные квазинормы (в частности, нормы), будем получать различные понятия сходимости последовательностей функций. Например, сходимость в смысле нормы (57.10) означает равномерную сходимость, сходимость в смысле квазинормы (57.11) является сходимостью другого рода, она называется *сходимостью в среднем* (мы уже встречались с такого рода сходимостью: см. например, лемму 2 в п. 55.2).

В линейном нормированном пространстве R можно естественным образом ввести расстояние между элементами этого пространства. Именно справедливо следующее утверждение.

Лемма 3. *Линейное нормированное пространство R является метрическим пространством с метрикой*

$$\rho(x, y) = \|x - y\|, \tag{57.13}$$

при этом сходимость последовательностей в пространстве R по этой метрике совпадает со сходимостью по норме.

Доказательство. Функция $\rho(x, y)$, определенная формулой (57.13), действительно является расстоянием: свойства расстояния (см. п. 57.1) вытекают из свойств нормы 1—4 (проверьте это). Второе утверждение леммы очевидно.

Будем говорить, что *метрика* (57.13) *порождается заданной нормой пространства R.*

Лемма 4. *Для любых двух элементов x и y линейного квазинормированного пространства R справедливо неравенство*

$$\big|\|x\| - \|y\|\big| \leqslant \|x - y\|. \tag{57.14}$$

Доказательство. Так как

$$\|x\| = \|(x-y) + y\| \leqslant \|x - y\| + \|y\|,$$

то

$$\|x\| - \|y\| \leqslant \|x - y\|$$

и аналогично

$$\|y\| - \|x\| \leqslant \|x - y\|.$$

Из последних двух неравенств и следует неравенство (57.14).

Лемма доказана.

Лемма 5. *Норма является непрерывной функцией на линейном нормированном пространстве в смысле метрики* (57.13).

Доказательство. Пусть заданы элемент $x_0 \in R$ и число $\varepsilon > 0$. Возьмем $\delta = \varepsilon$ (см. в п. 57.1 определение 9 непрерывной функции в метрическом пространстве). Из условия $\|x - x_0\| < \varepsilon$ в силу неравенства (57.14) получаем $|\|x\| - \|x_0\|| < \varepsilon$.

Лемма доказана.

Упражнение 13. Доказать, что функции $x + y$ и λx являются непрерывными функциями во всяком нормированном линейном пространстве, иначе говоря, что операции сложения и умножения на число непрерывны в указанном пространстве.

Определение 22. *Пусть R — линейное квазинормированное (в частности, нормированное) пространство. Множество $E \subset R$ называется ограниченным, или, подробнее, ограниченным по квазинорме (соответственно по норме), если существует такая постоянная $M > 0$, что $\|x\| \leqslant M$ для всех $x \in E$.*

Лемма 6. *Если последовательность $\{x_n\}$ сходится по квазинорме в R, то она ограничена.*

Доказательство. Пусть $x = \lim\limits_{n \to \infty} x_n$; в силу сходимости последовательности существует такое n_0, что если $n \geqslant n_0$, то $\|x_n - x\| \leqslant 1$ и, следовательно,

$$\|x_n\| \leqslant \|(x_n - x) + x\| \leqslant \|x_n - x\| + \|x\| \leqslant \|x\| + 1.$$

Положим $M = \max\{\|x_1\|, \|x_2\|, \ldots, \|x_{n_0-1}\|, \|x\| + 1\}$, тогда, очевидно, $\|x_n\| \leqslant M$ для всех $n = 1, 2, \ldots$.

Лемма доказана.

Упражнение 14. Доказать, что множество E линейного нормированного пространства ограничено по норме тогда и только тогда, когда оно ограничено как множество метрического пространства в смысле метрики (57.13) (см. упражнение 1 в п. 57.1).

Определение 23. *Линейное нормированное пространство называется полным, если оно является полным метрическим пространством в смысле метрики, порождаемой нормой данного пространства.*

Полное линейное нормированное пространство называется банаховым пространством).*

Линейное нормированное пространство $C[a, b]$ непрерывных на отрезке $[a, b]$ функций с нормой (57.10) является банаховым пространством. Мы в этом убедились в п. 57.1, когда рассматривали метрическое пространство непрерывных на отрезке $[a, b]$ функций с рас-

---

*) С. Банах (1892—1945) — польский математик.

стоянием (57.1), которое как раз порождается нормой (57.10). Мы видели, что полнота пространства $C[a, b]$ следует из того, что сходимость последовательности в этом пространстве означает ее равномерную сходимость на отрезке $[a, b]$.

Теорема 2. *Всякое линейное нормированное пространство содержится и плотно в некотором банаховом пространстве.*

Доказательство. Согласно теореме 1 п. 57.1, достаточно показать, что на пополнение R^* линейного нормированного пространства R можно продолжить с R алгебраические операции и норму. Это можно сделать с помощью предельного перехода. Как и при доказательстве теоремы 1, будем считать, что $R \subset R^*$, иначе говоря, отождествим пространство R с изометрическим ему подпространством пополнения R^*.

Пусть, например, $x \in R^*$ и $y \in R^*$. В силу плотности R в R^* существуют последовательности $x_n \in R$ и $y_n \in R$, $n = 1, 2, \ldots$, такие, что $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = y$.

Покажем, что последовательность $\{x_n + y_n\}$ сходится. Действительно,

$$\rho(x_n + y_n, x_m + y_m) = \|(x_n + y_n) - (x_m + y_m)\| \leqslant$$
$$\leqslant \|x_n - x_m\| + \|y_n - y_m\| = \rho(x_n, x_m) + \rho(y_n, y_m).$$

Из сходимости последовательностей $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ следует, что они фундаментальные, поэтому последовательность $\{x_n + y_n\}$ также фундаментальная и, следовательно, в силу полноты R^* сходящаяся.

Положим по определению

$$x + y = \lim_{n\to\infty} (x_n + y_n).$$

Аналогично с помощью предельного перехода определяется и λx, $x \in R^*$.

Легко проверить, что определенные так алгебраические операции $x + y$, λx для элементов пополнения R^* не зависят от выбора последовательностей $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$, таких, что $x_n \to x$, $y_n \to y$, $x_n \in R$, $y_n \in R$, $n = 1, 2, \ldots$. Также легко убедиться, что в случае, когда элементы принадлежат исходному пространству R, определенные нами алгебраические операции совпадают с заданными.

Определим теперь норму для $x \in R^*$. Пусть $x_n \in R$, $n = 1, 2, \ldots$, и $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$. Покажем, что последовательность $\{\|x_n\|\}$ фундаментальная. В самом деле, из неравенства (57.14) для всех натуральных n и m имеем

$$\big|\|x_n\| - \|x_m\|\big| \leqslant \|x_n - x_m\| = \rho(x_n, x_m). \tag{57.15}$$

Последовательность $\{x_n\}$, будучи сходящейся, является и фундаментальной, поэтому из неравенства (57.15) следует, что и числовая последовательность $\{\|x_n\|\}$ фундаментальная, а значит, сходится.

Положим по определению

$$\|x\| = \lim_{n\to\infty}\|x_n\|.$$

Так определенная норма $\|x\|$, $x \in R^*$, не зависит от выбора последовательности $x_n \in R$, $n = 1, 2, \ldots$, такой, что $x_n \to x$. Легко проверить также, используя предельный переход, что для функции $\|x\|$, $x \in R^*$, выполняются свойства нормы 1—4 и что в случае $x \in R$ мы получаем прежнюю норму.

Теорема доказана.

В качестве примера рассмотрим линейное нормированное пространство непрерывных на отрезке $[a, b]$ функций с нормой (57.11). Эта норма порождает метрику (57.8). Как отмечалось выше, метрическое пространство непрерывных функций с метрикой (57.8) не является полным. Согласно доказанной теореме, рассматриваемое линейное нормированное пространство непрерывных на отрезке $[a, b]$ функций можно дополнить до полного пространства. Это банахово пространство обозначается $L_1[a, b]$.

Определение 24. *Система элементов x_α, $\alpha \in \mathfrak{A}$ ($\mathfrak{A}$ — некоторое множество индексов) линейного нормированного пространства R называется полной, если замыкание ее линейной оболочки (см. п. 57.2) совпадает со всем пространством R.*

Это означает, что для каждого элемента $x \in R$ и каждого числа $\varepsilon > 0$ существуют такие элементы $x_{\alpha_1}, \ldots, x_{\alpha_n}$ данной системы и такие числа $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, что выполняется неравенство

$$\left\| x - \left(\lambda_1 x_{\alpha_1} + \ldots + \lambda_n x_{\alpha_n}\right)\right\| < \varepsilon. \tag{57.16}$$

С частным случаем понятия полноты для системы функций мы уже встречались в п. 55.7.

Определение 25. *Если в линейном нормированном пространстве R существует последовательность элементов x_k, $k = 1, 2, \ldots$, образующая полную систему пространства R, то пространство R называется сепарабельным.*

В заключение этого пункта введем понятие базиса; предварительно введем понятие ряда в пространство R.

Определение 26. *Рядом в линейном нормированном пространстве R будем называть выражение вида*

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_n, \quad \text{где} \quad x_n \in R, \quad n = 1, 2, \ldots. \tag{57.17}$$

Сумма вида

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} x_k, \quad n = 1,\ 2,\ \ldots,$$

называется n-й частичной суммой ряда (57.17). *Ряд* (57.17) *называется сходящимся, если последовательность его частичных сумм образует в пространстве R сходящуюся последовательность. Ее предел $s = \lim\limits_{n\to\infty} s_n$ называется суммой ряда* (57.17) *и пишется*

$$s = \sum_{n=1}^{\infty} x_n.$$

При этом, как и для числовых рядов, справедливы следующие утверждения:

если ряд (57.17) *сходится, то сходится и ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \lambda x_n$, причем, если $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n = s$, то $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \lambda\, x_n = \lambda s$;*

если в пространстве R сходятся два ряда, то сходится и ряд, состоящий из суммы их элементов с одинаковыми номерами и его сумма равна сумме сумм данных рядов.

***Определение 27**. Последовательность элементов e_n, $n = 1, 2, \ldots$, линейного нормированного пространства R называется базисом, если:*

1) *элементы e_n, $n = 1,\ 2,\ \ldots$, образуют линейно независимую систему* (*см. п.* 55.2);

2) *каково бы ни было $x \in R$, существуют такие числа λ_n, $n = 1,\ 2,\ \ldots$, что*

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n\, x_n.$$

Из этого следует, что если последовательность $\{e_n\}$ является базисом пространства R, то для каждого элемента $x \in R$ существует последовательность чисел $\{\lambda_n\}$, такая, что для каждого числа $\varepsilon > 0$ существует номер n_ε, такой, что при всех $n \geqslant n_\varepsilon$ выполняется неравенство

$$\| x - (\lambda_1 e_1 + \ldots + \lambda_n e_n) \| < \varepsilon. \tag{57.18}$$

З а м е ч а н и е. Подчеркнем отличие между последовательностью элементов, образующих полную систему, и последовательностью элементов, образующих базис. В первом случае коэффициенты λ_k, $k = 1, 2, \ldots, n$, в неравенстве (57.16) зависят, вообще говоря, не только от выбора элемента $x \in R$, но и от выбора числа ε. Во втором же случае коэффициенты λ_k, $k = 1,\ 2,\ \ldots,\ n$, в неравенстве (57.18) определяются только самим элементом (они называются *коэффициентами разложения элемента x по данному базису* или *координатами*

элемента x при данном базисе) и лишь их количество, т. е. число n_ε, зависит от выбора ε.

Проблема существования базиса в линейных нормированных пространствах до сих пор не решена. В следующем пункте мы рассмотрим еще более специальный класс пространств, в котором проблема базиса и связанные с ней вопросы поддаются более полному исследованию.

Задача 26. Доказать, что если p-е степени, $1 \leqslant p < +\infty$, абсолютных величин функций φ и ψ интегрируемы по Риману на отрезке $[a, b]$, то выполняется неравенство

$$\left[\int_a^b |\varphi(t)+\psi(t)|^p\,dt\right]^{\frac{1}{p}} \leqslant$$
$$\leqslant \left[\int_a^b |\varphi(t)|^p\,dt\right]^{\frac{1}{p}} + \left[\int_a^b |\psi(t)|^p\,dt\right]^{\frac{1}{p}},$$

которое называется *неравенством Минковского* *).

Доказать, что множество функций, p-е степени которых интегрируемы по Риману на отрезке $[a, b]$, образуют линейное квазинормированное пространство, если в нем ввести квазинорму по формуле

$$\|\varphi\| = \left[\int_a^b |\varphi(t)|^p\,dt\right]^{\frac{1}{p}}.$$

Пополнение этого пространства обозначается $L_p[a, b]$.

57.4. Гильбертовы и предгильбертовы пространства

Определение 28. *Вещественная функция, определенная на множестве упорядоченных пар элементов вещественного линейного пространства R и обозначаемая (x, y), $x \in R$, $y \in R$, называется скалярным произведением, если она удовлетворяет следующим условиям:*

1) $(x, y) = (y, x)$, $\quad x \in R$, $\quad y \in R$;

2) $(\lambda x + \mu y, z) = \lambda(x, z) + \mu(y, z)$, $\quad x \in R$, $\quad x \in R$, $\quad z \in R$, λ *и* μ — *вещественные числа*;

3) $(x, x) \geqslant 0$, $\quad x \in R$;

4) *если* $(x, x) = 0$, *то* $x = 0$.

Заметим, что из свойства 2 следует, что для любого $x \in R$ справедливо равенство

$$(x, 0) = 0.$$

Действительно, $\quad (x, 0) = (x, 0\cdot 0) = 0(x, 0) = 0.$

*) Г. Минковский (1864—1909) — польский математик.

Определение 29. *Вещественная функция (x, y), определенная на множестве упорядоченных пар элементов вещественного линейного пространства R, $x \in R$, $y \in R$, и удовлетворяющая лишь условиям 1, 2, 3, называется квазискалярным произведением.*

Аналогичным образом вводится понятие и квазискалярного (в частности, скалярного) произведения в комплексном линейном пространстве R. В этом случае комплекснозначная функция (x, y) называется квазискалярным (соответственно скалярным) произведением, если она удовлетворяет свойству 2 для любых комплексных чисел λ и μ, свойству 3 и свойству

$$1') \ (x, y) = (\overline{y, x}), \quad x \in R, \quad y \in R.$$

В дальнейшем под линейным пространством будем понимать вещественные линейные пространства, если не оговорено что-либо другое.

Лемма 7. *Для любой пары векторов x и y линейного пространства R с квазискалярным произведением справедливо неравенство*

$$(x, y)^2 \leqslant (x, x)(y, y), \tag{57.19}$$

которое называется неравенством Коши—Шварца.

Доказательство. Для любого вещественного числа λ в силу свойства 3 квазискалярного произведения имеем

$$(\lambda x + y, \ \lambda x + y) \geqslant 0.$$

Отсюда, применяя свойства 1 и 2 квазискалярного произведения, получаем

$$\lambda^2(x, x) + 2\lambda(x, y) + (y, y) \geqslant 0.$$

Следовательно, дискриминант получившегося квадратичного относительно λ трехчлена неположителен:

$$(x, y)^2 - (x, x)(y, y) \leqslant 0,$$

что равносильно (55.19).

Лемма доказана.

Следствие. *Для любой пары векторов линейного пространства с квазискалярным произведением справедливо неравенство*

$$\sqrt{(x+y, x+y)} \leqslant \sqrt{(x, x)} + \sqrt{(y, y)}, \quad x \in R, \quad y \in R. \tag{57.20}$$

Действительно, применяя неравенство Коши—Шварца, получим

$$(x+y, \ x+y) = (x, x) + 2(x, y) + (y, y) \leqslant$$
$$\leqslant (x, x) + 2\sqrt{(x, x)(y, y)} + (y, y) = \left[\sqrt{(x, x)} + \sqrt{y, y)}\right]^2.$$

Упражнение 15. Доказать, что в комплексном линейном пространстве со скалярным произведением выполняется неравенство

$$|(x, y)|^2 \leqslant (x, x)(y, y), \quad x \in R, \quad y \in R.$$

Если в пространстве R положить

$$\|x\| = \sqrt{(x, x)}, \quad x \in R, \tag{57.21}$$

то функция $\|x\|$ удовлетворяет свойствам 1—3 квазинормы. Свойство 1 квазинормы следует из свойства 3 квазискалярного произведения, свойство 2 — из свойства 2, свойство 3 квазинормы — из неравенства (57.20).

Если же квазискалярное произведение является скалярным, то квазинорма (57.21) является нормой. Действительно, свойство нормы 4 следует из свойства 4 скалярного произведения. Таким образом, мы доказали следующее утверждение.

Лемма 8. *Каждое линейное пространство со скалярным (соответственно квазискалярным) произведением является нормированным (соответственно квазинормированным) пространством с нормой (соответственно квазинормой), определяемой формулой* (57.21), *а следовательно, и метрическим пространством с метрикой* (57.13).

Квазинорму (57.21) будем называть *квазинормой (соответственно нормой), порожденной заданным квазискалярным (скалярным) произведением*. Расстояние (57.13), порожденное нормой (57.21) линейного пространства со скалярным произведением, будем также называть *расстоянием, порожденным заданным скалярным произведением*.

Применяя обозначение квазинормы, неравенство (57.19) можно переписать в виде

$$(x, y) \leqslant \|x\| \, \|y\|. \tag{57.22}$$

Примеры линейных пространств со скалярным произведением.

1. Рассмотрим n-мерное линейное пространство со скалярным произведением

$$xy = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i, \tag{57.23}$$

где $x = (x_1, \ldots, x_n)$, $y = (y_1, \ldots, y_n)$. В этом случае норма элемента x (ее обычно называют длиной вектора x) определяется формулой

$$\|x\| = \sqrt{x_1^2 + \ldots + x_n^2},$$

а метрика — формулой расстояния в n-мерном евклидовом пространстве:

$$\rho(x, y) = \|x - y\| = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \ldots + (x_n - y_n)^2}\,.$$

Для этого пространства неравенство Коши — Шварца было доказано нами раньше (см. лемму 1 в п. 18.1).

2. Возьмем более сложный пример. Будем говорить, что функция f является *функцией с интегрируемым квадратом на отрезке* $[a, b]$, если существует его разбиение $\tau = \{x_i\}_{i=1}^{i=k}$, такое, что на каждом отрезке $[\xi_i, \eta_i]$, таком, что

$$x_{i-1} < \xi_i < \eta_i < x_i, \quad i = 1, 2, \dots, k,$$

функция f интегрируема по Риману и существуют, вообще говоря, несобственные интегралы

$$\int\limits_{x_{i-1}}^{x_i} f^2(x)\,dx, \quad i = 1, 2, \dots, k,$$

а следовательно, и интеграл

$$\int\limits_a^b f^2(x)\,dx.$$

Совокупность функций с интегрируемым квадратом на отрезке $[a, b]$ образует линейное пространство. Пусть f и g — две функции этого пространства. Поскольку произведение функций, интегрируемых по Риману, является снова функцией, интегрируемой по Риману (см. п. 28.1), и

$$|fg| \leqslant \frac{f^2 + g^2}{2}\ ^{*)},$$

то интеграл

$$\int\limits_a^b f(x)\,g(x)\,dx$$

сходится и даже абсолютно.

Квазискалярное произведение в этом пространстве определяется формулой

$$(f, g) = \int\limits_a^b f(x)\,g(x)\,dx. \tag{57.24}$$

Свойства 1, 2, 3 квазискалярного произведения легко проверяются. Заметим, что неравенство (57.19) может быть записано в этом случае так:

---

*) Это неравенство сразу получается из неравенства

$$(|f| - |g|)^2 \geqslant 0.$$

$$\left(\int_a^b f(x)g(x)\,dx\right)^2 \leqslant \int_a^b f^2(x)\,dx \int_a^b g^2(x)\,dx$$

и называется *неравенством Коши — Буняковского**). Для квазинормы функции f имеем формулу

$$\|f\| = \sqrt{\int_a^b f^2(x)\,dx}. \qquad (57.25)$$

Легко устанавливается, что квазискалярное произведение (57.24) не является скалярным (проверьте это).

3. Рассмотрим линейное пространство непрерывных на отрезке $[a, b]$ функций. Для функций этого пространства интеграл (57.24) будет уже скалярным произведением. Действительно, если функция f непрерывна на отрезке $[a, b]$ и

$$(f, f) = \int_a^b f^2(x)\,dx = 0,$$

то, согласно лемме 2 из п. 57.3, имеем $f \equiv 0$ на $[a, b]$.

Для расстояния между двумя непрерывными функциями f и g в этом пространстве получаем формулу

$$\rho(f, g) = \|f - g\| = \left\{\int_a^b [f(x) - g(x)]^2\,dx\right\}^{\frac{1}{2}}. \qquad (52.26)$$

Мы уже встречались со сходимостью функций в смысле этой метрики: см. определение сходимости последовательности функций в смысле среднего квадратичного в п. 55.2.

Все сказанное естественным образом распространяется и на функции, определенные на любом бесконечном промежутке, в частности, на всей оси.

Упражнение 16. Пусть R — линейное пространство с квазискалярным произведением. Элементы $x \in R$ и $y \in R$ называются эквивалентными, если $\|x - y\|^2 = (x - y,\ x - y) = 0$. Обозначим через $\widetilde{R}$ множество, элементами которого являются классы эквивалентных элементов пространства R. Пусть $\widetilde{x} \in \widetilde{R}$, $\widetilde{y} \in \widetilde{R}$, $x \in \widetilde{x}$, $y \in \widetilde{y}$, λ и μ — числа. Определим $\lambda\widetilde{x} + \mu\widetilde{y}$ как элемент множества $\widetilde{R}$, содержащий $\lambda x + \mu y$, и положим $(\widetilde{x}, \widetilde{y}) = (x, y)$. Доказать, что эти определения корректны, т. е. не зависят от выбора элементов $x \in \widetilde{x}$ и $y \in \widetilde{y}$, и что $\widetilde{R}$ является линейным пространством, а $(\widetilde{x}, \widetilde{y})$ — скалярным произведением.

Лемма 9. *Скалярное произведение является непрерывной функцией (см. п. 57.1) на пространстве R, на котором оно задано.*

*) В. Я. Буняковский (1804—1889) — русский математик.

Доказательство. В самом деле, для любых $x_0 \in R$, $y_0 \in R$, $x \in R$ и $y \in R$ выполняется неравенство

$$|(x_0, y_0)-(x, y)| = |(x_0-x, y_0)+(x, y_0-y)| \leqslant$$
$$\leqslant \|x_0-x\| \, \|y_0\| + \|x\| \, \|y-y_0\|, \qquad (57.27)$$

из которого сразу следует непрерывность скалярного произведения. Действительно, если $x \in O(x_0, \delta)$, $y \in O(y_0, \delta)$, то, замечая, что $\|x\| \leqslant \|x-x_0\|+\|x_0\| < \|x_0\|+\delta$, из (57.27) получим

$$|(x_0, y_0)-(x, y)| < \delta \|y_0\| + (\|x_0\|+\delta)\delta.$$

Отсюда следует, что при любом фиксированном числе $\varepsilon > 0$ всегда можно выбрать $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ так, что при $x \in O(x_0, \delta)$, $y \in O(y_0, \delta)$ выполняется неравенство $|(x_0, y_0)-(x, y)| < \varepsilon$; для этого достаточно выбрать $\delta > 0$ так, чтобы $\delta\|y_0\| + (\|x_0\|+\delta)\delta < \varepsilon$, что, очевидно, всегда возможно.

Лемма доказана.

Из непрерывности скалярного произведения в пространстве R следует, например, что ряды в этом пространстве можно умножать почленно не только на числовые множители, но и на элементы пространства R.

Лемма 10. *Пусть в пространстве R задан сходящийся ряд*

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_n = s, \quad x_n \in R, \quad n = 1, 2, \ldots .$$

Тогда для всякого элемента $a \in R$ числовой ряд, получающийся из данного почленным умножением его на a, также сходится и

$$\sum_{n=1}^{\infty} (x_n, a) = (s, a).$$

Доказательство. Поскольку

$$s = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} x_k,$$

$$(s, a) = \left(\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} x_k, \ a\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{n} x_k, a\right) =$$
$$= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} (x_k, a) = \sum_{n=1}^{\infty} (x_n, a).$$

Упражнение 17. Доказать, что всякое n-мерное линейное пространство со скалярным произведением полно.

Определение 30. *Линейное пространство со скалярным произведением, полное в смысле метрики, порожденной заданным скалярным произведением, называется гильбертовым пространством.*

Просто же линейное пространство со скалярным произведением называют также *предгильбертовым пространством.* Это название оправдывается следующей теоремой.

Теорема 3. *Всякое предгильбертово пространство R содержится и плотно в некотором гильбертовом пространстве R^*.*

Доказательство. Согласно теореме 1 п. 57.1 и теореме 2 п. 57.2, достаточно показать, что на пополнение R^* линейного нормированного пространства R можно продолжить с R скалярное произведение с сохранением свойств 1—4. Это можно сделать с помощью предельного перехода. Действительно, поскольку $\overline{R} = R^*$, то для любой пары точек $x \in R^*$ и $y \in R^*$ существуют последовательности точек $x_n \in R$, $y_n \in R$, $n = 1, 2, \ldots$, такие, что

$$\lim_{n \to \infty} x_n = x, \quad \lim_{n \to \infty} y_n = y.$$

Покажем, что существует $\lim\limits_{n \to \infty} (x_n, y_n)$. В самом деле, из неравенства (57.27) следует, что для всех натуральных m и n

$$|(x_m, y_m) - (x_n, y_n)| \leqslant \|x_m - x_n\| \, \|y_m\| + \|x_n\| \, \|y_m - y_n\|.$$

Так как в силу сходимости последовательности $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ ограничены по норме и являются фундаментальными, то из этого неравенства следует, что числовая последовательность $\{(x_n, y_n)\}$ — также фундаментальная и, следовательно, сходится.

Положим по определению $(x, y) = \lim\limits_{n \to +\infty} (x_n, y_n)$. Легко проверить, используя предельный переход, что для таким образом определенной функции выполняются свойства 1—4 скалярного произведения. Теорема доказана.

Полученное полное гильбертово пространство называется *пополнением* исходного *предгильбертова пространства.*

Примером гильбертова пространства является n-мерное евклидово пространство (см. 55.23). Другие примеры будут рассмотрены далее.

Определение 31. *Два предгильбертова пространства R_1 и R_2 называются изоморфными, если они изоморфны как линейные пространства и если отображение f, осуществляющее их изоморфизм, сохраняет квазискалярное (в частности скалярное) произведение, т. е. что $(f(x), f(y)) = (x, y)$ для любых двух элементов $x \in R_1$ и $y \in R_2$.*

Два изоморфных линейных пространства могут отличаться лишь природой своих элементов, а не «пространственными свойствами»,

поэтому в дальнейшем изоморфные линейные пространства со скалярным произведением часто не будут различаться.

Упражнение 18. Доказать, что все n-мерные линейные пространства со скалярным произведением изоморфны между собой.

57.5. Пространство L_2

Определение 32. *Линейное пространство непрерывных на отрезке $[a, b]$ функций со скалярным произведением, определенным по формуле (57.24), называется пространством $L_2^C[a, b]$.*

Лемма 11. *Пространство $L_2^C[a, b]$ не является гильбертовым.*

Доказательство. Чтобы убедиться, что всякое пространство $L_2^C[a, b]$ не является полным, достаточно рассмотреть пространство $L_2^C[a, b]$ для некоторого фиксированного отрезка (почему?). Возьмем для определенности отрезок $[-1; 1]$ и приведем пример фундаментальной в пространстве $L_2^C[-1; 1]$ последовательности функций, не сходящейся в этом пространстве.

Положим

$$f_n(x) = \begin{cases} -1, & \text{если } -1 \leqslant x \leqslant -\frac{1}{n}, \\ nx, & \text{если } -\frac{1}{n} \leqslant x \leqslant \frac{1}{n}, \\ 1, & \text{если } \frac{1}{n} \leqslant x \leqslant 1, \end{cases} \tag{57.28}$$

$$n = 1, 2, \ldots,$$

(рис. 174). Очевидно, что функции $f_n(x)$, $n = 1, 2, \ldots$, непрерывны на отрезке $[-1; 1]$. Замечая далее, что $|f_n(x)| \leqslant 1$, имеем для $m > n$

$$\|f_n - f_m\|^2 = \int_{-1}^{1} |f_n(x) - f_m(x)|^2\,dx =$$

$$= \int_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}} |f_n(x) - f_m(x)|^2\,dx \leqslant 4 \int_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}} dx = \frac{8}{n},$$

откуда, очевидно, следует, что последовательность (57.28) фундаментальная в пространстве $L_2^C[a, b]$.

Пусть теперь

$$f(x) = \begin{cases} -1, & \text{если } -1 \leqslant x < 0, \\ 1, & \text{если } 0 \leqslant x \leqslant 1. \end{cases}$$

Нетрудно убедиться, что последовательность (57.28) сходится на отрезке $[-1;\ 1]$ в смысле квазинормы (57.25) к функции f. Действительно,

$$\|f-f_n\|^{2*)}=\int_{-1}^{1}|f(x)|-f_n(x)|^2\,dx=$$

$$=\int_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}}|f(x)-f_n(x)|^2\,dx\leqslant 4\int_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}}dx=\frac{8}{n}\to 0 \text{ при } n\to\infty. \quad (57.29)$$

Покажем теперь, что последовательность (57.28) не сходится в пространстве $L_2^C[a,b]$, т. е. не сходится в смысле квазинормы (55.25) ни к какой непрерывной функции. Допустим противное. Пусть существует непрерывная на отрезке $[-1;\ 1]$ функция $g(x)$, такая, что

$$\lim_{n\to\infty}\|g-f_n\|=0. \quad (57.30)$$

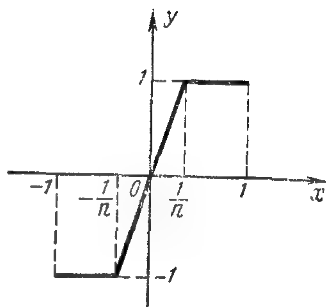


Рис. 174

Тогда

$$\|f-g\|=\|(f-f_n)+(f_n-g)\|\leqslant\|f-f_n\|+\|f_n-g\|,$$

где оба слагаемых правой части в силу (57.29) и (57.30) стремятся к нулю при $n\to\infty$, а левая часть не зависит от n, следовательно,

$$\int_{-1}^{1}|f(x)-g(x)|^2\,dx=\|f-g\|^2=0;$$

тем более,

$$\int_{-1}^{0}|f(x)-g(x)|^2\,dx=0,\quad \int_{0}^{1}|f(x)-g(x)|^2\,dx=0. \quad (57.31)$$

Но на промежутках $[-1;\ 0)$ и $[0;\ 1]$ функции f и g непрерывны, поэтому из (57.31) следует, что $f(x)=g(x)$ на $[-1;\ 0)$ и $f(x)=g(x)$

---

*) Поскольку $f-f_n$ уже не является непрерывной функцией, то здесь символ $\|\varphi\|$ обозначает уже квазинорму функции φ. Это следует иметь в виду и в дальнейших рассмотрениях.

на $[0; 1]$*), но тогда $\lim\limits_{x\to -0} g(x) \neq \lim\limits_{x\to +0} g(x)$, т. е. g — разрывная функция. Полученное противоречие и доказывает утверждение.

Лемма доказана.

Итак, линейное пространство $L_2^C[a, b]$ не полно. Однако мы знаем, что всякое предгильбертово пространство можно дополнить до полного, в частности, это можно сделать и с рассматриваемым пространством.

Определение 33. *Пополнение предгильбертова пространства $L_2^C = L_2^C[a, b]$ называется пространством $L_2 = L_2[a, b]$.*

Таким образом, пространство $L_2[a, b]$ состоит из непрерывных на отрезке $[a, b]$ функций и некоторых новых «абстрактных элементов» (классов фундаментальных последовательностей, см. п. 57.1), которыми мы дополнили исходное пространство $L_2^C[a, b]$.

Оказывается, однако, и это очень интересно и важно, что эти абстрактные элементы можно рассматривать не как классы фундаментальных последовательностей (см. доказательство теоремы 1 в п. 57.1), а так же, как некоторые функции, точнее, как классы эквивалентных (в определенном смысле) функций, причем скалярное произведение для них также определяется формулой (55.24), только интеграл в этой формуле понимается не в смысле собственного или несобственного интеграла, изученного нами, а в более общем смысле, в смысле так называемого *интеграла Лебега***).

Полное изложение этого вопроса выходит за рамки рассматриваемых нами методов, поэтому ограничимся лишь некоторыми примерами.

Определение 34. *Функция f, определенная на отрезке $[a, b]$, называется функцией из пространства $L_2[a, b]$, если выполняются следующие условия:*

$$1)\ \int_a^b f^2(x)\,dx < \infty \tag{57.32}$$

(интеграл понимается, вообще говоря, в несобственном смысле);

2) *существует последовательность непрерывных на отрезке $[a, b]$ функций*

$$f_n(x),\ n = 1, 2, \ldots, \tag{57.33}$$

таких, что

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b [f(x) - f_n(x)]^2\,dx = 0.$$

---

*) Это следует из леммы 2 п. 57.3.

**) А. Лебег (1875—1941) — французский математик.

В этом случае будем писать $f \in L_2[a, b]$.

Прибегая к обозначению квазинормы (57.25), последнее условие можно записать в виде

$$\lim_{n\to\infty} \|f - f_n\| = 0^{*)}. \qquad (57.34)$$

Данное определение оправдывается следующими обстоятельствами.

1. *Последовательность* (57.33), *удовлетворяющая условиям* (57.34), *является фундаментальной в* $L_2^C[a, b]$.

Действительно, в силу (57.34)

$$\|f_n - f_m\| = \|(f_n - f) + (f - f_m)\| \leqslant \|f_n - f\| + \|f - f_m\| \to 0$$

при $n \to \infty$ и $m \to \infty$, поэтому последовательность (57.33) принадлежит некоторому классу f^* эквивалентных фундаментальных последовательностей (см. п. 55.1). Функция f и рассматривается как *представитель* указанного *элемента* $f^* \in L_2[a, b]$, причем пишется $f \in f^*$.

2. *Норма* $\|f^*\|$ *в пространстве* $L_2[a, b]$ *и квазинорма* (57.25) $\|f\|$ *совпадают.*

В самом деле, в силу определения нормы при пополнении пространства (см. п. 55.3)

$$\|f^*\| = \lim_{n\to\infty} \|f_n\|; \qquad (57.35)$$

с другой стороны, в силу неравенства (57.14) для квазинорм

$$\big|\|f\| - \|f_n\|\big| \leqslant \|f - f_n\| \to 0 \text{ при } n \to \infty;$$

следовательно,

$$\|f\| = \lim_{n\to\infty} \|f_n\|. \qquad (57.36)$$

Сравнивая равенства (57.35) и (57.36), получаем

$$\|f^*\| = \|f\|. \qquad (57.37)$$

3. *Если*

$$f \in f^* \in L_2[a, b],\ g \in g^* \in L_2[a, b],\ \lambda \text{ и } \mu \text{ — числа,}$$

то

$$\lambda f + \mu g \in \lambda f^* + \mu g^* \qquad (57.38)$$

---

*) Существенно отметить, что здесь символ $\|\ \|$ обозначает именно квазинорму (55.25), а не норму в пространстве $L_2[a, b]$, ибо функция $f - f_n$ в случае если она не является непрерывной на отрезке $[a, b]$, не является пока элементом пространства $L_2[a, b]$, определенного нами как пополнение пространства $L_2^C[a, b]$.

и
$$(f, g)=(f^*, g^*) \qquad (57.39)$$
(здесь слева стоит квазискалярное произведение (57.24), а справа скалярное произведение в $L_2[a, b]$).

В самом деле,
$$\left\{\int\limits_a^b [\lambda f(x)+\mu g(x)]^2\,dx\right\}^{\frac{1}{2}}=\|\lambda f+\mu g\| \leqslant |\lambda|\,\|f\|+|\mu|\,\|g\|<+\infty,$$
и если $f_n \in L_2^C[a, b]$, $g_n \in L_2^C[a, b]$ и
$$\lim_{n\to\infty} \|f-f_n\|=0, \quad \lim_{n\to\infty} \|g-g_n\|=0, \qquad (57.40)$$
то $\lambda f_n+\mu g_n \in L_2^C[a, b]$, $n=1, 2, \ldots$, и
$$\|(\lambda f+\mu g)-(\lambda f_n+\mu g_n)\| \leqslant |\lambda|\,\|f-f_n\|+|\mu|\,\|g-g_n\| \to 0 \text{ при } n\to\infty.$$

Как видим, для функции $\lambda f+\mu g$ выполняются условия (57.32) и (57.34), тем самым (57.38) доказано.

Для доказательства (57.39) заметим, что в силу определения скалярного произведения при пополнении пространства (см. п. 57.4)
$$(f^*, g^*)=\lim_{n\to\infty} (f_n, g_n). \qquad (57.41)$$

С другой стороны, применяя неравенство Коши — Буняковского для квазискалярного произведения (57.24), получим
$$|(f, g)-(f_n, g_n)| \leqslant |(f, g-g_n)|+|(f-f_n, g_n)| \leqslant$$
$$\leqslant \|f\|\,\|g-g_n\|+\|f-f_n\|\,\|g_n\| \to 0 \text{ при } n\to\infty,$$
т. е.
$$(f, g)=\lim_{n\to\infty} (f_n, g_n). \qquad (57.42)$$

Сравнивая равенства (57.41) и (57.42), мы и получим условие (57.39). Очевидно, что из (57.39) получается в случае $f=g$ еще раз равенство (57.37).

Из свойств 2 и 3 следует, что вместо того, чтобы оперировать в рассматриваемом случае с «абстрактными элементами» пространства $L_2[a, b]$, можно оперировать с их представителями, что, конечно, значительно удобнее и проще, так как все операции приводятся к обычным операциям над функциями.

Следует иметь в виду, что *разные функции f и g, удовлетворяющие условиям* (57.32) *и* (57.34), *могут являться представителями одного*

и того же элемента пространства $L_2[a, b]$. Это возможно тогда и только тогда, когда

$$\|f-g\|=0. \qquad (57.43)$$

Действительно, пусть $f \in f^* \in L_2[a, b]$, $g \in g^* \in L_2[a, b]$. Если

$$f^*=g^*, \qquad (57.44)$$

то в силу (57.37) и (57.38)

$$\|f-g\|=\|(f-g)^*\|=\|f^*-g^*\|=0.$$

Если же выполняется (57.43), то, употребляя обозначения (57.40), получим

$$\|f_n-g_n\| \leqslant \|f_n-f\|+\|f-g\|+\|g-g_n\| \to 0 \text{ при } n\to\infty.$$

Это означает, что последовательности $\{f_n\}$ и $\{g_n\}$ эквивалентны, а значит, выполняется равенство (57.44).

Интересно получить условия, выражающиеся в терминах свойств только самой функции f (без привлечения последовательностей непрерывных функций (57.33)), влекущие за собой принадлежность функции f пространству $L_2[a, b]$ в вышеуказанном смысле. Можно доказать, что если функция f удовлетворяет только условию (57.32), то она уже принадлежит пространству $L_2[a, b]$. Мы, однако, для простоты ограничимся доказательством более слабого утверждения.

Теорема 4. *Пусть функция f определена на отрезке $[a, b]$ и пусть:*

1) *на любом отрезке $[\xi, \eta]$, $a<\xi<\eta<b$, функция f кусочно непрерывна;*

2) *интеграл $\int\limits_a^b f^2(x)\,dx$ сходится,*

тогда $f \in L_2[a, b]$.

Доказательство. Функция f кусочно непрерывна на отрезке $[\xi, \eta]$ (см. п. 28.1), поэтому существует его разбиение $\tau=\{\xi_i\}_{i=0}^{i=k}$ $(\xi_0=\xi,\ \xi_k=\eta)$, такое, что функция f непрерывна на каждом интервале (ξ_{i-1}, ξ_i), и существуют конечные пределы $f(\xi_i+0)$, $f(\xi_i-0)$ $(i=1, 2, \ldots, k-1)$, $f(\xi+0)$, $f(\eta-0)$. В силу этого функция f ограничена на отрезке $[\xi, \eta]$. Пусть число $M>0$ таково, что

$$|f(x)| \leqslant M, \quad \xi \leqslant x \leqslant \eta.$$

Возьмем какое-либо $\delta>0$, такое, что δ-окрестности точек ξ_i, $i=0, 1, \ldots, k$, не пересекаются и содержатся в интервале (a, b).

Определим теперь вспомогательную функцию φ следующим образом:

$$\varphi(x) = \begin{cases} f(x), & \text{если } x \in [\xi, \eta] \setminus \bigcup_{i=1}^{k-1} (\xi_i - \delta, \xi_i + \delta), \\ \dfrac{f(\xi_i + \delta) - f(\xi_i - \delta)}{2\delta}(x - \xi_i + \delta) + f(\xi_i - \delta), & \\ \qquad \text{если } x \in (\xi_i - \delta, \xi_i + \delta), & i = 1, 2, \ldots, k-1, \\ \dfrac{f(\xi + 0)}{\delta}(x - \xi + \delta), & \text{если } x \in [\xi - \delta, \xi], \\ \dfrac{f(\eta - 0)}{\delta}(\eta - x + \delta), & \text{если } x \in [\eta, \eta + \delta], \\ 0, & \text{если } x \in (a, \xi - \delta) \text{ или } x \in (\eta + \delta, b). \end{cases}$$

Таким образом, функция φ совпадает с функцией f во всех точках отрезка $[\xi, \eta]$, не принадлежащих ни к какой из δ-окрестностей точек ξ_i, $i = 1, 2, \ldots, k-1$, а в этих окрестностях функция φ линейно интерполирует значения функции f в концевых точках этих окрестностей; вне же отрезка $[\xi, \eta]$ функция φ в δ-окрестности точек ξ и η линейно переходит в ноль (рис. 175). Очевидно, что функция φ непрерывна и

$$|\varphi(x)| \leqslant M, \quad a \leqslant x \leqslant b.$$

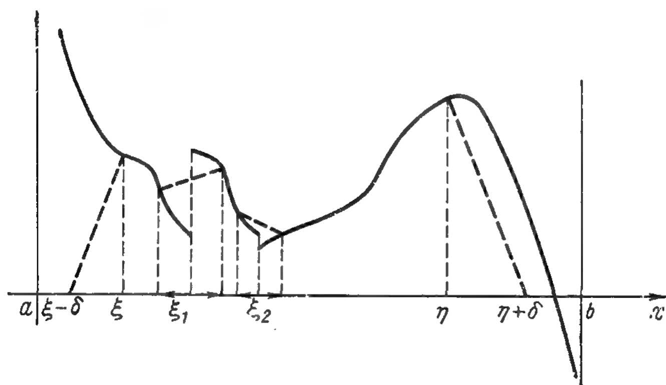


Рис. 175

Далее,

$$\int_a^b (f - \varphi)^2\, dx = \int_a^\xi (f - \varphi)^2\, dx + \sum_{i=1}^{k-1} \int_{\xi_i - \delta}^{\xi_i + \delta} (f - \varphi)^2 dx +$$

$$+ \int_\eta^b (f - \varphi)^2\, dx \leqslant 2 \int_a^\xi f^2\, dx + 2 \int_{\xi - \delta}^{\xi} \varphi^2\, dx + \sum_{i=1}^{k-1} 4M^2 \int_{\xi_i - \delta}^{\xi_i + \delta} dx +$$

$$+2\int_{\eta}^{\eta+\delta}\varphi^2\,dx+2\int_{\eta}^{b}f^2\,dx^{*)}\leqslant 2\int_{a}^{\xi}f^2\,dx+2M^2\delta+8kM^2\delta+$$

$$+2M^2\delta+2\int_{\eta}^{b}f^2\,dx=2\left(\int_{a}^{\xi}f^2\,dx+\int_{\eta}^{b}f^2\,dx\right)+4(2k+1)M^2\delta. \quad (57.45)$$

Пусть теперь задано $\varepsilon>0$. Выберем отрезок $[\xi, \eta]$ так, чтобы

$$\int_{a}^{\xi}f^2\,dx+\int_{\eta}^{b}f^2\,dx<\frac{\varepsilon^2}{4}.$$

Это возможно в силу сходимости интеграла $\int_{a}^{b}f^2(x)\,dx$.

Затем выберем $\delta>0$ так, чтобы

$$4(2k+1)M^2\delta<\frac{\varepsilon^2}{2},$$

тогда из неравенства (57.45) получим

$$\|f-\varphi\|<\varepsilon.$$

Отсюда, очевидно, следует существование последовательности непрерывных на отрезке $[a, b]$ функций, сходящейся в метрике L_2 к функции f, т. е. для функции f выполняется условие (57.34). Что же касается условия (57.32), то его выполнение предполагалось с самого начала. Итак, $f\in L_2[a, b]$.

Теорема доказана.

Задача 27. Доказать, что функция $f(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}$ не принадлежит пространству $L_2[-\pi, \pi]$, т. е. не является пределом в среднем в смысле L_2 последовательности непрерывных функций.

Задача 28. Пусть $L_2^R[a, b]$ — предгильбертово пространство, порожденное линейным пространством функций, интегрируемых по Риману на отрезке $[a, b]$ с квазискалярным произведением (57.24). Доказать, что пространство $L_2^R[a, b]$ неполно и что его пополнение изоморфно пространству $L_2[a, b]$.

Определение пространства $L_2[a, b]$ естественным образом обобщается и на случай бесконечного промежутка. Рассмотрим для определенности всю числовую ось. Для двух непрерывных интегри-

---

*) Мы воспользовались очевидным числовым неравенством

$$(f-\varphi)^2\leqslant 2(f^2+\varphi^2).$$

руемых в квадрате на всей вещественной оси функций φ и ψ скалярное произведение определим по формуле

$$(\varphi, \psi) = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)\, \psi(x)\, dx. \qquad (57.46)$$

Это определение корректно, ибо интеграл, стоящий справа, при сделанных относительно функций φ и ψ предположениях сходится и даже абсолютно. Это сразу следует из неравенства

$$|\varphi(x)\psi(x)| \leqslant \frac{\varphi^2(x) + \psi^2(x)}{2}.$$

Свойства скалярного произведения для (57.46) легко проверяются. Можно показать, аналогично конечному промежутку, что получившееся при этом метрическое пространство непрерывных интегрируемых в квадрате функций не является полным в метрике, порожденной скалярным произведением; его пополнение обозначается $L_2(-\infty, +\infty)$.

Замечание. Мы видели, что в одних и тех же линейных пространствах можно разным образом вводить квазинормы, в частности нормы. Поэтому часто во избежание недоразумений квазинорма (норма) элемента x пространства R обозначается не просто символом $\|x\|$, а символом $\|x\|_R$. Например, норма (57.10) функции f — символом $\|f\|_{C[a,b]}$ или, короче, $\|f\|_C$, квазинорма (57.11) — символом $\|f\|_{L_1[a,b]}$, или, короче, $\|f\|_{L_1}$, квазинорма (57.25) — символом $\|f\|_{L_2[a,b]}$ или, короче, $\|f\|_{L_2}$.

Сходимость последовательности функций по квазинорме $\|f\|_{L_2}$ называется также сходимостью в смысле среднего квадратичного (см. определение 5 в п. 55.2) или сходимостью в среднем в смысле L_2, а сходимость по квазинорме $\|f\|_{L_1}$ — просто сходимостью в среднем или, подробнее, сходимостью в среднем в смысле L_1.

Упражнения. 19. Доказать неэквивалентность понятий сходимости в среднем в смысле L_1 и L_2 для последовательности функций.

20. Доказать, что если последовательность интегрируемых функций $\varphi_n(x)$, $n = 1, 2, \ldots$, равномерно сходится на отрезке $[a, b]$ к интегрируемой функции $\varphi(x)$, то она сходится и в среднем в смысле L_1 и L_2 к этой функции.

21. Построить пример последовательности непрерывных функций, сходящейся к некоторой непрерывной функции в среднем на отрезке в смысле L_2, но не сходящейся равномерно на этом отрезке.

22. Пусть $u_n(x)$, $n = 1, 2, \ldots$, — интегрируемые функции. Доказать, что если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ сходится в среднем в смысле L_2 на отрезке $[a, b]$ к интегрируемой функции $u(x)$, тогда этот ряд можно почленно интегрировать на отрезке $[a, b]$:

$$\int_a^b u(x)\, dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b u_n(x)\, dx.$$

Мы для простоты рассматривали в примерах функции одного переменного. Подобным же образом, если взять линейное пространство функций, непрерывных на замыкании некоторого кубируемого множества $G \subset E^n$, ввести скалярное произведение по формуле $(\varphi, \psi) = \int \varphi\psi \, dG$ и пополнить получившееся пространство, то получим гильбертово пространство, которое обозначается $L_2(G)$.

Мы описали различные типы пространств. В анализе в основном изучаются пространства, элементами которых являются функции. Такие пространства называются *функциональными*.

Введенные в этом параграфе многочисленные определения будут применяться в дальнейшем для описания определенных свойств различных классов функций в привычных и наглядных геометрических терминах (пространство, точки, расстояние, вектор, базис и т. п.) и помогут установить аналогии, имеющиеся между обычными n-мерными векторными пространствами и пространствами функций, и выяснить специфические свойства бесконечномерных функциональных пространств.

§ 58. ОРТОНОРМИРОВАННЫЕ БАЗИСЫ И РАЗЛОЖЕНИЯ ПО НИМ

58.1. Ортонормированные системы

Определение 1. *Пусть R — предгильбертово пространство. Элементы $x \in R$ и $y \in R$ называются ортогональными, если $(x, y) = 0$; в этом случае пишется также $x \perp y$.*

Определение 2. *Система элементов x_α, $\alpha \in \mathfrak{A}$ ($\mathfrak{A}$ — некоторое множество индексов), пространства R называется ортогональной, если любые ее два элемента ортогональны. Если, кроме того, норма ее любого элемента равна единице, т. е. $\|x_\alpha\| = 1$, $\alpha \in \mathfrak{A}$, то она называется ортонормированной.*

Очевидно, если система $\{x_\alpha, \alpha \in \mathfrak{A}\}$ ортогональная и $x_\alpha \neq 0$ для всех $\alpha \in \mathfrak{A}$, то ее можно нормировать. Действительно, поделив каждый элемент на его норму, получим ортонормированную систему

$$\left\{\frac{x_\alpha}{\|x_\alpha\|}, \ \alpha \in \mathfrak{A}\right\}.$$

Лемма 1. *Если система $\{x_\alpha, \alpha \in \mathfrak{A}\}$ элементов пространства R является ортогональной и все $x_\alpha \neq 0, \alpha \in \mathfrak{A}$, то эта система является линейно независимой системой.*

Доказательство. Пусть для некоторых элементов

$$x_{\alpha_k}, \ \alpha_k \in \mathfrak{A}, \ k = 1, 2, \ldots, n,$$

имеем

$$\lambda_1 x_{\alpha_1} + \lambda_2 x_{\alpha_2} + \ldots + \lambda_n x_{\alpha_n} = 0.$$

Умножим скалярно обе части этого равенства на x_{α_k}, k — фиксировано ($k = 1, 2, \ldots, n$), получим

$$\lambda_k (x_{\alpha_k}, x_{\alpha_k}) = 0,$$

ибо в силу ортогональности системы $(x_{\alpha_j}, x_{\alpha_k}) = 0$, $j \neq k$. Замечая далее, что по предположению $x_{\alpha_k} \neq 0$ и, следовательно $(x_{\alpha_k}, x_{\alpha_k}) \neq 0$, получим $\lambda_k = 0$, $k = 1, 2, \ldots, n$.

Линейная независимость системы x_α, $\alpha \in \mathfrak{A}$ доказана.

Докажем еще одну лемму, дающую критерий линейной независимости функций через скалярные произведения.

Лемма 2. *Если для системы элементов $x_1, \ldots, x_n$ пространства R определитель*

$$G(x_1, \ldots, x_n) = \begin{vmatrix} (x_1, x_1) & (x_1, x_2) & \ldots & (x_1, x_n) \\ (x_2, x_1) & (x_2, x_2) & \ldots & (x_2, x_n) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ (x_n, x_1) & (x_n, x_2) & \ldots & (x_n, x_n) \end{vmatrix}$$

равен нулю, то система линейно зависима.

Определитель $G(x_1, \ldots, x_n)$ называется *определителем Грамма* данной системы.

Доказательство. Рассмотрим линейную систему n уравнений с n неизвестными λ_i, $i = 1, 2, \ldots, n$:

$$(\lambda_1 x_1 + \ldots + \lambda_n x_n, x_i) = 0, \quad i = 1, 2, \ldots, n, \tag{58.1}$$

или

$$\lambda_1 (x_1, x_i) + \ldots + \lambda_n (x_n, x_i) = 0,$$
$$i = 1, 2, \ldots, n.$$

Определителем этой системы является транспонированный определитель Грамма, который по условию леммы равен нулю. Следовательно, система (58.1) имеет нетривиальное решение $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ (т. е. такое, что не все λ_i, $i = 1, 2, \ldots, n$, равны нулю). Умножим равенство (58.1) на λ_i и просуммируем по i от 1 до n:

$$(\lambda_1 x_1 + \ldots + \lambda_n x_n, \ \lambda_1 x_1 + \ldots + \lambda_n x_n) = 0.$$

Отсюда $\lambda_1 x_1 + \ldots + \lambda_n x_n = 0$, что означает линейную зависимость системы $x_1, \ldots, x_n$.

Лемма доказана.

Упражнение 1. Доказать, что если система элементов $x_1, \ldots, x_n$ линейно зависима, то ее определитель Грамма равен нулю.

Примеры. 1. Тригонометрическая система функций

$$1, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \ldots, \cos nx, \sin nx, \ldots \quad (58.2)$$

является ортогональной системой в пространстве $L_2[-\pi, \pi]$ (см. п. 55.4).

Это было доказано в лемме п. 55.1. Из формул (55.4) следует, что

$$\|\sin nx\| = \sqrt{\pi}, \; \|\cos nx\| = \sqrt{\pi}, \; n = 1, 2, \ldots,$$

поэтому ортонормированная система, соответствующая системе (58.2), имеет вид

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \; \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos x, \; \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin x, \ldots, \; \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos nx, \; \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin nx \ldots .$$

2. Многочлены

$$P_0(x) = 1, \quad P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n (x^2-1)^n}{dx^n}, \quad n = 1, 2, \ldots, \quad (58.3)$$

называются полиномами Лежандра.

Из формулы (58.3) видно, что $P_n(x)$ является многочленом степени n:

$$P_n(x) = \frac{(2n-1)!!}{n!} x^n + \ldots .$$

Покажем, что система (58.3) является ортогональной системой в пространстве $L_2[-1; 1]$, именно, докажем, что полином Лежандра $P_n(x)$ ортогонален к любому многочлену $Q_m(x)$ степени $m < n$.

Заметив предварительно, что выражение

$$\frac{d^k (x^2-1)^n}{dx^k}$$

при $k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$, обращается в ноль в точках $x = -1$ и $x = 1$, имеем, интегрируя по частям:

$$\int_{-1}^{1} Q_m(x) \frac{d^n (x^2-1)^n}{dx^n} dx = Q_m(x) \frac{d^{n-1} (x^2-1)^n}{dx^{n-1}} \Bigg|_{-1}^{1} -$$

$$- \int_{-1}^{1} Q_m'(x) \frac{d^{n-1} (x^2-1)^n}{dx^{n-1}} dx = \ldots = (-1)^m Q_m^{(m)}(x) \int_{-1}^{1} \frac{d^{n-m} (x^2-1)^n}{dx^{n-m}} dx =$$

$$= (-1)^m Q_m^{(m)}(x) \frac{d^{n-m-1} (x^2-1)^n}{dx^{n-m-1}} \Bigg|_{-1}^{1} = 0.$$

Таким образом,

$$\int_{-1}^{1} Q_m(x) P_n(x)\, dx = 0, \quad m < n,$$

в частности,

$$\int_{-1}^{1} P_m(x) P_n(x)\, dx = 0, \quad m \neq n.$$

Подсчитаем теперь норму полиномов Лежандра. Замечая, что

$$P_n(x) = \frac{(2n-1)!!}{n!} x^n + Q_{n-1}(x),$$

где $Q_{n-1}(x)$ — многочлен степени не выше $n-1$, и используя ортогональность $P_n(x)$ ко всем многочленам меньшей степени, получим

$$\int_{-1}^{+1} P_n^2(x)\, dx = \int_{-1}^{+1} P_n(x) \left[\frac{(2n-1)!!}{n!} x^n + Q_{n-1}(x)\right] dx =$$

$$= \frac{(2n-1)!!}{n!} \int_{-1}^{1} P_n(x)\, x^n\, dx = \frac{(2n-1)!!}{n!\,(2n)!!} \int_{-1}^{1} \frac{d^n (x^2-1)^n}{dx^n} x^n\, dx.$$

Интегрируя последовательно по частям, будем иметь

$$\int_{-1}^{+1} P_n^2(x)\, dx = \ldots = \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} (-1)^n \int_{-1}^{1} (x^2-1)^n\, dx =$$

$$= (-1)^{n+1} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} 2n \int_{-1}^{1} (1-x^2)^{n-1} x^2\, dx = \ldots = \int_{-1}^{1} x^{2n} dx = \frac{2}{2n+1}.$$

Таким образом,

$$\|P_n(x)\| = \sqrt{\frac{2}{2n+1}}.$$

Упражнение 2. Доказать, что последовательность функций $\sin (2n+1) \frac{x}{2}$, $n = 1, 2, \ldots$, образует ортогональную систему на отрезке $[0, \pi]$.

Заметим, что из доказанной ортогональности тригонометрической системы (58.2) и системы полиномов Лежандра (58.3) следует, согласно лемме 1, линейная независимость этих систем.

58.2. Ортогонализация систем

Пусть снова R — предгильбертово пространство. Рассмотрим следующую задачу. Пусть дана линейно независимая счетная система элементов x_n, $n = 1, 2, \ldots$, пространства R. Требуется с помощью конечных линейных комбинаций получить из данной системы ортогональную систему. Оказывается, эта задача всегда имеет решение.

Теорема 1. *Пусть*

$$x_n, n=1, 2, \ldots, \tag{58.4}$$

— линейно независимая система элементов пространства R. Тогда существует ортогональная система элементов y_n, $y_n \neq 0$, $n=1, 2, \ldots$, этого пространства, такая, что каждый элемент y_n, $n = 1, 2, \ldots$, является линейной комбинацией первых n элементов системы (58.4):

$$y_n = \alpha_{n,1} x_1 + \alpha_{n,2} x_2 + \ldots + \alpha_{n,n} x_n. \tag{58.5}$$

Построение ортогональной системы $\{y_n\}$ вида (58.5) из линейно независимой системы $\{x_n\}$ называется обычно *процессом ортогонализации* системы $\{x_n\}$.

Доказательство. Положим $y_1 = x_1$. Поскольку система (58.4) линейно независима, то $y_1 \neq 0$ (почему?).

Пусть существуют попарно ортогональные элементы $y_n \neq 0$, $n = 1, 2, \ldots, k$, $k \geqslant 1$, удовлетворяющие условию (58.5). Найдем элемент y_{k+1}, ортогональный к элементам $y_1, \ldots, y_k$ в виде

$$y_{k+1} = \beta_{k+1,1} y_1 + \ldots + \beta_{k+1,k} y_k - x_{k+1}. \tag{58.6}$$

Из условий ортогональности

$$(y_1, y_{k+1}) = \ldots = (y_k, y_{k+1}) = 0 \tag{58.7}$$

получаем

$$(y_1, y_1)\beta_{k+1,1} = (y_1, x_{k+1}), \ldots, (y_k, y_k)\beta_{k+1,k} = (y_k, x_{k+1}). \tag{58.8}$$

Отсюда однозначным образом находятся коэффициенты $\beta_{k+1,i}$, $i = 1, 2, \ldots, k$. Элемент y_{k+1}, задаваемый представлением (58.6) с найденными коэффициентами $\beta_{k+1,i}$, $i = 1,2,\ldots, k$, удовлетворяет условиям (58.7).

Подставим в (58.6) y_n, $n = 1, 2, \ldots, k$, записанные в виде (58.5); после приведения подобных членов получим

$$y_{k+1} = \alpha_{k+1,1} x_1 + \ldots + \alpha_{k+1,k} x_k - x_{k+1}. \tag{58.9}$$

Отсюда следует, что $y_{k+1} \neq 0$, ибо в противном случае элементы $x_1, \ldots, x_{k+1}$ оказались бы линейно зависимыми.

Теорема доказана.

Замечание. Отметим, что если какая-либо ортогональная система элементов z_n, $z_n \neq 0$, $n=1, 2, \ldots$, пространства R такова, что каждый элемент z_n является линейной комбинацией первых n элементов системы (58.4)

$$z_n = \gamma_{n,1} x_1 + \ldots + \gamma_{n,n} x_n, \quad n=1, 2, \ldots, \tag{58.10}$$

то элемент z_n отличается от элемента y_n лишь некоторым числовым множителем λ_n:

$$z_n = \lambda_n y_n, \quad n=1, 2, \ldots .$$

Докажем это. Обозначим через $L(u_1, \ldots, u_n)$ линейную оболочку системы элементов $u_1, \ldots, u_n$ (см. п. 57.2); $L(x_1, \ldots, x_n)$ является n-мерным пространством, в котором элементы $x_1, \ldots, x_n$ образуют базис (см. п. 57.2). Элементы y_i, $i=2, \ldots, n$ (соответственно, элементы z_i, $i=1, 2, \ldots, n$), линейно независимы и содержатся в $L(x_1, \ldots, x_n)$; следовательно, элементы y_i, $i=1, 2, \ldots, n$ и элементы z_i, $i=1, 2, \ldots, n$, также образуют базис в пространстве $L(x_1, \ldots, x_n)$. Таким образом, $L(x_1, \ldots, x_n) = L(y_1, \ldots, y_n) = L(z_1, \ldots, z_n)$, $n=1, 2, \ldots$.

Элемент $y_n \in L(x_1, \ldots, x_n)$ ортогонален подпространству $L(y_1, \ldots, y_{n-1}) = L(x_1, \ldots, x_{n-1})$, т. е. ортогонален каждому элементу этого подпространства. Элемент же $z_n \in L(x_1, \ldots, x_n)$ ортогонален подпространству $L(z_1, \ldots, z_{n-1}) = L(x_1, \ldots, x_{n-1})$. Итак, элементы y_n и z_n n-мерного пространства $L(x_1, \ldots, x_{n-1})$ ортогональны одному и тому же $(n-1)$-мерному подпространству $L(x_1, \ldots, x_{n-1})$ и, следовательно, пропорциональны $z_n = \lambda_n y_n$, $n=1, 2, \ldots$ (почему?).

Отметим еще, что из

$$L(x_1, \ldots, x_n) = L(y_1, \ldots, y_n), \quad n=1, 2, \ldots,$$

вытекает, что линейные оболочки системы (58.4) и (58.5) совпадают.

Рассмотрим теперь систему степеней x:

$$1, x, x^2, \ldots, x^n, \ldots \tag{58.11}$$

Эта система линейно независима на любом промежутке (конечном или бесконечном). Действительно, если

$$\lambda_0 + \lambda_1 x + \ldots + \lambda_n x^n \equiv 0, \tag{58.12}$$

то, дифференцируя это тождество n раз, получим

$$n! \lambda_n = 0,$$

т. е. $\lambda_n = 0$,

Если уже доказано, что $\lambda_{k+1} = \ldots = \lambda_n = 0$, то тождество (58.12) примет вид

$$\lambda_0 + \lambda_1 x + \ldots + \lambda_k x^k = 0.$$

Дифференцируя его k раз, получим $\lambda_k = 0$. Итак, $\lambda_1 = \ldots = \lambda_n = 0$, что и означает линейную независимость функций $1, x, \ldots, x^n$.

Если систему (58.11) взять на отрезке $[-1; 1]$ в качестве исходной системы (58.4) и применить к ней процесс ортогонализации (см. 58.5), то мы получим последовательность многочленов соответственно степеней 0, 1, 2, ... Из сделанного выше замечания следует, что эти многочлены могут отличаться от многочленов Лежандра (58.3) лишь постоянным множителем.

58.3. Ряды Фурье

Пусть, как и раньше, R — предгильбертово пространство. Рассмотрим следующую задачу. Пусть задана система n линейно независимых векторов $e_1, e_2, \ldots, e_n$ пространства R и фиксирован некоторый вектор $y \in R$. Требуется найти линейную комбинацию вида

$$a_1 e_1 + \ldots + a_n e_n, \tag{58.13}$$

которая дает наилучшее приближение в пространстве R элемента y, т. е. осуществляет минимум выражения

$$\| y - (a_1 e_1 + \ldots + a_n e_n) \|, \tag{58.14}$$

или, что то же, минимум функции

$$\left\| y - \sum_{k=1}^{n} a_k e_k \right\|^2 = \left(y - \sum_{k=1}^{n} a_k e_k, \; y - \sum_{k=1}^{n} a_k e_k \right) \tag{58.15}$$

от переменных $a_1, \ldots, a_n$.

Если пространство R n-мерное и, следовательно, векторы $e_1, \ldots, e_n$ образуют базис, то всегда можно подобрать такие коэффициенты a_k, $k = 1, 2, \ldots, n$, что будет выполняться равенство

$$y = a_1 e_1 + \ldots + a_n e_n \tag{58.16}$$

и, следовательно, выражение (58.14) обратится в ноль. Если же R не конечномерно, или конечномерно, но имеет размерность, большую, чем n, то равенство (58.16), вообще говоря, осуществить невозможно и задача состоит в отыскании линейной комбинации (58.13), дающей минимальное значение выражению (58.14).

Применяя, если надо, процесс ортогонализации (см. п. 58.2), систему $e_1, \ldots, e_n$ всегда можно заменить ортогональной системой не равных нулю векторов. Поэтому будем предполагать, что $e_k \neq 0$,

$(e_k, e_j) = 0$, $k \neq j$, $j, k = 1, 2, \ldots, n$. Пользуясь условием ортогональности, преобразуем функцию (58.15):

$$\left\| y - \sum_{k=1}^{n} a_k e_k \right\|^2 = (y, y) + \sum_{k=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_k a_j (e_k, e_j) - 2 \sum_{k=1}^{n} a_k (y, e_k) =$$

$$= \|y\|^2 + \sum_{k=1}^{n} a_k^2 \|e_k\|^2 - 2 \sum_{k=1}^{n} a_k (y, e_k) =$$

$$= \|y\|^2 + \sum_{k=1}^{n} \left(a_k \|e_k\| - \frac{(y, e_k)}{\|e_k\|} \right)^2 - \sum_{k=1}^{n} \frac{(y, e_k)^2}{\|e_k\|^2}. \qquad (58.17)$$

Отсюда следует *), что минимум выражения (58.14) достигается, когда

$$a_k \|e_k\| - \frac{(y, e_k)}{\|e_k\|} = 0, \quad k = 1, 2, \ldots, n,$$

т. е. когда

$$a_k = \frac{(y, e_k)}{\|e_k\|^2}. \qquad (58.18)$$

Определение 3. *Числа a_k, определенные по формуле* (58.18), *называются коэффициентами Фурье элемента y по системе $e_1, \ldots, e_n$.*

Если система $e_1, \ldots, e_n$ ортонормированная, то формулы (58.18) приобретают более простой вид:

$$a_k = (y, e_k). \qquad (58.19)$$

В случае n-мерного пространства, когда в качестве векторов $e_1, \ldots, e_n$ выбран базис пространства, коэффициенты Фурье вектора y являются его коэффициентами разложения по указанному базису (являются координатами элемента y относительно этого базиса). В этом легко убедиться, умножив скалярно равенство (58.16) на e_k, $k = 1, 2, \ldots, n$.

Вернемся теперь к выражению (58.17). Если в нем в качестве $a_1, \ldots, a_n$ взять коэффициенты Фурье (58.18), то получим

$$\|y\|^2 - \sum_{k=1}^{n} a_k^2 \|e_k\|^2 = \left\| y - \sum_{k=1}^{n} a_k e_k \right\|^2 \geqslant 0, \qquad (58.20)$$

откуда

$$\sum_{k=1}^{n} a_k^2 \|e_k\|^2 \leqslant \|y\|^2. \qquad (58.21)$$

Итак, доказана следующая теорема.

---

*) Очевидно, что это рассуждение является непосредственным обобщением доказательства теоремы 10 из п. 55.8.

Теорема 2. *Пусть* e_k, $e_k \neq 0$, $k = 1, 2, \ldots, n$, *— ортогональная система векторов предгильбертова пространства* R. *Наилучшее приближение в пространстве* R *вектора* $y \in R$ *линейными комбинациями вида* $\sum_{k=1}^{n} \alpha_k e_k$ *осуществляется, когда* α_k, $k = 1, 2, \ldots, n$, *суть коэффициенты Фурье:* $\alpha_k = a_k$. *При этом*

$$\inf_{\alpha_1, \ldots, \alpha_n} \left\| y - \sum_{k=1}^{n} \alpha_k e_k \right\|^2 = \left\| y - \sum_{k=1}^{n} a_k e_k \right\|^2 = \|y\|^2 - \sum_{k=1}^{n} a_k^2 \|e_k\|^2 \geqslant 0.$$

Пусть теперь задана последовательность (а не конечная система, как выше) элементов

$$e_k \, (e_k \neq 0), \quad k = 1, 2, \ldots, \tag{58.22}$$

образующих ортогональную систему в пространстве R. Числа a_k, $k = 1, 2, \ldots$, определяемые по формуле (58.18), и в этом случае будем называть *коэффициентами Фурье* элемента y по системе (56.22).

Определение 4. *Ряд*

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k e_k, \tag{58.23}$$

где a_k, $k = 1, 2, \ldots$, *— коэффициенты Фурье элемента* y *по системе* (58.22), *называется рядом Фурье элемента* y *по системе* (58.22). *В этом случае будем писать*

$$y \sim \sum_{k=1}^{\infty} a_k e_k.$$

Определение 5. *Пусть задана ортогональная система* (58.22) *и элемент* $y \in R$. *Наилучшим приближением элемента* y *с помощью линейных комбинаций вида* $\sum_{k=1}^{n} \alpha_k e_k$ *(*n *— фиксировано) называется число* $E_n(y)$, *определяемое равенством*

$$E_n(y) = \inf_{\alpha_1, \ldots, \alpha_n} \left\| y - \sum_{k=1}^{n} \alpha_k e_k \right\|, \quad n = 1, 2, \ldots,$$

где нижняя грань берется по всевозможным коэффициентам $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$, *или, что то же, по всевозможным линейным комбинациям вида* $\sum_{k=1}^{n} \alpha_k e_k$.

Поскольку всякая линейная комбинация элементов $e_1, \ldots, e_n$ может также рассматриваться и как линейная комбинация элементов $e_1, \ldots, e_n, e_{n+1}$, то, очевидно,

$$E_{n+1}(y) \leqslant E_n(y). \tag{58.24}$$

Из теоремы 2 следует, что рассматриваемая нижняя грань достигается, если в качестве коэффициентов α_k взять коэффициенты Фурье, и что

$$E_n(y) = \inf_{\alpha_1, \ldots, \alpha_n} \left\| y - \sum_{k=1}^{n} \alpha_k e_k \right\| = \left\| y - \sum_{k=1}^{n} a_k e_k \right\| =$$
$$= \sqrt{\|y\|^2 - \sum_{k=1}^{n} a_k^2 \|e_k\|^2}, \quad a_k = \frac{(y, e_k)}{(e_k, e_k)}, \quad k = 1, 2, \ldots . \tag{58.25}$$

Полученный результат сформулируем в виде следствия из теоремы 2.

Следствие 1. *Частичные суммы*

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k e_k$$

ряда Фурье элемента $y \in R$ осуществляют наилучшее в пространстве R приближение элемента $y \in R$ с помощью линейных комбинаций вида $\alpha_1 e_1 + \ldots + \alpha_n e_n$.

Отметим еще несколько следствий теоремы 2.

Следствие 2.

$$\|y - s_{n+1}\| \leqslant \|y - s_n\|, \quad n = 1, 2, \ldots . \tag{58.26}$$

Это сразу вытекает из формул (58.24) и (58.25).

Следствие 3. *Для коэффициентов Фурье a_n, $n = 1, 2, \ldots$, каждого элемента $y \in R$ справедливо неравенство*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 \|e_n\|^2 \leqslant \|y\|^2, \tag{58.27}$$

называемое неравенством Бесселя.

Неравенство (58.27) непосредственно следует из неравенства (58.21) при $n \to \infty$ (ср. с неравенством (55.32) в п. 55.8).

Следствие 4. *Если существует постоянная $c > 0$, такая, что $\|e_k\| \geqslant c$ при всех $k = 1, 2, \ldots$, в частности, если система* (58.22) *ортонормированная (в этом случае можно взять $c = 1$), то коэффициенты Фурье стремятся к нулю при $k \to \infty$:*

$$\lim_{k \to \infty} a_k = 0. \tag{58.28}$$

Это следует из сходимости ряда

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k^2 \leqslant \frac{1}{c^2} \sum_{k=1}^{\infty} a_k^2 \| e_k \|^2 \leqslant \frac{\| y \|^2}{c^2},$$

ибо общий член сходящегося ряда стремится к нулю.

Естественно возникает вопрос: при каких условиях ряд Фурье элемента y сходится?

Теорема 3. *Если пространство R гильбертово (т. е. полно), то ряд Фурье элемента $y \in R$ по любой ортогональной системе* (58.22) *сходится в пространстве R, и если*

$$y_0 = \sum_{k=1}^{\infty} a_k e_k, \tag{58.29}$$

то элемент $y - y_0$ ортогонален ко всем элементам системы (58.22).

Доказательство. Пусть $s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k e_k$, $n = 1, 2, \ldots,$ — частичные суммы ряда Фурье (58.23) элемента y по системе (58.22), тогда

$$\| s_{n+p} - s_n \|^2 = \left\| \sum_{k=n+1}^{n+p} a_k e_k \right\|^2 = \left(\sum_{k=n+1}^{n+p} a_k e_k, \sum_{k=n+1}^{n+p} a_k e_k \right) =$$
$$= \sum_{k=n+1}^{n+p} a_k^2 \| e_k \|^2, \quad n = 1, 2, \ldots, \quad p = 1, 2, \ldots . \tag{58.30}$$

В силу неравенства Бесселя (58.27) ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k^2 \| e_k \|^2$$

сходится, и, следовательно, в силу критерия Коши для сходимости числового ряда, для каждого числа $\varepsilon > 0$ существует такой номер n_ε, что при $n \geqslant n_\varepsilon$ и $p > 0$ выполняется неравенство

$$\sum_{k=n+1}^{n+p} a_k^2 \| e_k \|^2 < \varepsilon^2,$$

поэтому, согласно неравенству (58.30) при $n \geqslant n_\varepsilon$ и $p > 0$, имеем

$$\| s_{n+p} - s_n \| < \varepsilon,$$

т. е. последовательность $\{s_n\}$ является фундаментальной в пространстве R и вследствие полноты последнего сходится.

В условиях теоремы последовательность s_n сходится, вообще говоря, не к элементу y. Пусть ее пределом является элемент

y_0, тогда, используя непрерывность скалярного произведения (см. п. 57.4), а также формулы (58.29) и (58.18), получим

$$(y-y_0, \quad e_k)=(y, e_k)-(y_0, \quad e_k)=(y, e_k)-\sum_{n=1}^{\infty} a_n(e_n, e_k)=$$
$$=(y, e_k)-a_k\|e_k\|^2=0, \quad k=1, 2, \ldots .$$

Теорема доказана.

Напомним теперь понятие полной системы (см. п. 55.3) применительно только к случаю счетных систем. Система элементов $\varphi_n \in R$, $n = 1, 2, \ldots$, называется полной, если множество конечных линейных комбинаций элементов этой системы плотно в пространстве R. Это означает (почему?), что для каждого элемента $x \in R$ и каждого числа $\varepsilon > 0$ существует такие номер $n = n(\varepsilon, x)$ и числа $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, что выполняется неравенств

$$\|x-(\lambda_1 e_1+\ldots+\lambda_n e_n)\|<\varepsilon. \tag{58.31}$$

Теорема 4. *Ортогональная система* (58.22) *предгильбертова пространства R является полной тогда и только тогда, когда для любого элемента $y \in R$ его ряд Фурье сходится в R к самому элементу y, т. е. когда*

$$y=\sum_{k=1}^{\infty} a_k e_k, \quad \textit{где} \quad a_k=\frac{(y, e_k)}{\|e_k\|^2}, \quad k=1, 2, \ldots, \tag{58.32}$$

иначе говоря, когда

$$\lim_{n\to\infty}\left\|y-\sum_{k=1}^{n} a_k e_k\right\|=0, \ a_k=\frac{(y, e_k)}{\|e_k\|^2}. \tag{58.33}$$

Действительно, если выполнено (58.33), то для каждого числа $\varepsilon > 0$ существует такая частичная сумма $s_n=\sum\limits_{k=1}^{n} a_k e_k$ ряда Фурье (58.32), что

$$\|y-s_n\|<\varepsilon, \tag{58.34}$$

т. е. выполняется условие (58.31).

Обратно, если условие (58.31) выполняется при каких-то коэффициентах $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, то оно заведомо выполняется согласно теореме 2 и в случае, если взять $\lambda_1 = a_1, \ldots, \lambda_n = a_n$, т. е. в этом случае для заданного $\varepsilon > 0$ выполняется условие (58.34) при некотором n, а значит, и при всех $m > n$ (см. (58.26)), а это равносильно выполнению условия (58.33).

Отметим еще следующий критерий полноты системы.

Теорема 5. *Для того чтобы ортогональная система* (58.22) *предгильбертова пространства R была полной в пространстве R,*

необходимо и достаточно, чтобы для любого элемента $y \in R$ выполнялось условие

$$\|y\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} a_k^2 \|e_k\|^2, \qquad (58.35)$$

где a_k — коэффициенты Фурье элемента y по системе (58.22).

Равенство (58.35) называется *равенством Парсеваля.*

В случае, когда полная система (58.21) ортонормирована, равенство Парсеваля принимает более простой вид

$$\|y\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} a_k^2, \quad a_k = (y, e_k), \quad k = 1, 2, \dots,$$

и представляет собой обобщение теоремы Пифагора на бесконечномерные пространства.

Доказательство теоремы 5. Мы имели (см. (58.20))

$$\left\|y - \sum_{k=1}^{n} a_k e_k\right\|^2 = \|y\|^2 - \sum_{k=1}^{n} a_k^2 \|e_k\|^2.$$

Переходя здесь к пределу при $n \to \infty$, мы и получаем эквивалентность условия

$$\lim_{n\to\infty} \left\|y - \sum_{k=1}^{n} a_k e_k\right\| = 0 \qquad (58.36)$$

и условия

$$\lim_{n\to\infty} \left(\|y\|^2 - \sum_{k=1}^{n} a_k^2 \|e_k\|^2\right) = 0,$$

т. е. условия

$$\|y\|^2 = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} a_k^2 \|e_k\|^2. \qquad (58.37)$$

Но условие (58.36) означает выполнение равенства (58.32), а условие (58.37) — равенство Парсеваля (58.35).

Теорема доказана.

Выясним теперь вопрос о единственности ряда Фурье для данного элемента.

Теорема 6. *Если ортогональная система* (58.22) *предгильбертова пространства R полная, то элемент $y \in R$, у которого все коэффициенты Фурье по системе* (58.22) *равны нулю, сам равен нулю.*

Следствие. *Из равенства всех коэффициентов Фурье у двух элементов пространства R по полной ортогональной системе* (58.22) *вытекает равенство самих элементов.*

Утверждение теоремы сразу следует из равенства Парсеваля. Действительно, согласно (58.35), из условия $a_k = 0$ следует $\|y\| = 0$ и, следовательно, $y = 0$.

Если, теперь $y_1 \in R$ и $y_2 \in R$, причем все их коэффициенты Фурье равны между собой:

$$\frac{(y_1, e_k)}{\|e_k\|^2} = \frac{(y_2, e_k)}{\|e_k\|^2}, \quad k = 1, 2, \ldots,$$

то для элемента $y = y_1 - y_2$ все коэффициенты Фурье равны нулю:

$$\frac{(y, e_k)}{\|e_k\|^2} = \frac{(y_1 - y_2, e_k)}{\|e_k\|^2} = \frac{(y_1, e_k)}{\|e_k\|^2} - \frac{(y_2, e_k)}{\|e_k\|^2} = 0, \quad k = 1, 2, \ldots,$$

и, следовательно, согласно теореме, $y = 0$, т. е. $y_1 = y_2$.

Теперь дадим еще один подход к понятию полноты ортогональной системы в полном пространстве R.

Определение 6*. Ортогональная система* (58.22) *называется замкнутой, если в пространстве R не существует элемента, отличного от нуля и ортогонального к каждому из элементов системы* (58.22).

Теорема 7*. Если пространство R полное, то ортогональная система* (58.22) *полная тогда и только тогда, когда она замкнутая.*

Доказательство. Если система (58.22) полная, $y \in R$ и y ортогонален ко всем элементам системы (58.22), то все его коэффициенты Фурье по системе (58.22) равны нулю (см. (58.18)), следовательно (теорема 6), $y = 0$.

Обратно, пусть система (58.22) замкнутая, $y \in R$ и $y \sim \sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k e_k$. Согласно теореме 3, ряд Фурье элемента y сходится, и если $y_0 = \sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k e_k$, то $y - y_0 \perp e_k$, $k = 1, 2, \ldots$. Поэтому в силу замкнутости системы (58.22) $y - y_0 = 0$, т. е. $y = y_0$ и $y = \sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k e_k$.

Теорема доказана.

58.4. Существование базиса в сепарабельных гильбертовых пространствах. Изоморфизм сепарабельных гильбертовых пространств

Теорема 8*. Во всяком сепарабельном предгильбертовом пространстве R со скалярным произведением существует ортонормированный базис e_k, $k = 1, 2, \ldots$.*

Доказательство. В случае, если пространство R n-мерное, теорема очевидна (см. п. 57.2 и п. 57.3), поэтому будем рассматривать только случай, когда пространство R бесконечномерно.

Поскольку пространство R сепарабельно, то в нем существует последовательность элементов

$$\varphi_k, \quad k=1, 2, \ldots, \tag{58.38}$$

образующих полную систему. Отбрасывая последовательно те из элементов, которые являются линейной комбинацией предыдущих, получим последовательность элементов

$$\psi_k, \quad k=1, 2, \ldots, \tag{58.39}$$

имеющих ту же линейную оболочку, что и исходная система (58.38), и линейно независимых (почему?). Применив к полученной системе процесс ортогонализации (см. п. 58.2) и нормирования (см. п. 58.1), получим ортонормированную систему

$$e_k, \quad \|e_k\|=1, \quad k=1, 2, \ldots, \tag{58.40}$$

имеющую ту же линейную оболочку, что и система (58.39), а значит, ту же, что и система (58.38). Поскольку в силу полноты системы (58.38) эта линейная оболочка плотна в R, то система (58.40) полная. В этом случае, как известно (см. п. 58.3), ряд Фурье каждого элемента $y \in R$ сходится к y:

$$y=\sum_{k=1}^{\infty} a_k e_k, \quad a_k=(y, e_k), \quad k=1, 2, \ldots,$$

и так как система (58.40) — линейно независимая система (см. лемму 1 в п. 58.1), то она и является ортонормированным базисом пространства R (определение базиса см. в п. 57.3).

Теорема доказана.

З а м е ч а н и е. Отметим, что разложение каждого элемента $x \in R$ по ортонормированному базису e_k, $k = 1, 2, \ldots$, т. е. представление элемента x в виде

$$x=\sum_{k=1}^{\infty} b_k e_k, \tag{58.41}$$

единственно.

Действительно, из (58.41) следует, что

$$(x, e_n)=\sum_{k=1}^{\infty} b_k (e_k, \quad e_n)=b_n, \quad n=1, 2, \ldots,$$

т. е. числа b_n, $n = 1, 2, \ldots$, являются коэффициентами Фурье и, следовательно, определены однозначно.

Теорема 9. *Все сепарабельные бесконечномерные гильбертовы пространства изоморфны между собой*)*.

*) Определение бесконечномерности пространства см. в п. 57.2, а изоморфизма пространств — в п. 57.4.

Предварительно докажем две леммы. Первая из них обобщает равенство Парсеваля (58.32).

Лемма 1. *Пусть R — предгильбертово пространство, e_k $(e_k \neq 0)$, $k=1, 2, \ldots,$ — полная ортогональная система в R, $x \in R$, $y \in R$ и пусть*

$$x \sim \sum_{k=1}^{\infty} a_k e_k, \quad y \sim \sum_{k=1}^{\infty} b_k e_k,$$

тогда

$$(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k b_k \| e_k \|^2, \tag{58.42}$$

в частности, если дополнительно предположить, что $\| e_k \| = 1$, $k = 1, 2, \ldots,$ то

$$(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k b_k. \tag{58.43}$$

Формула (58.42) обобщает, очевидно, формулу для скалярного произведения в n-мерном пространстве (см. п. 57.4).

Доказательство. По определению коэффициентов Фурье

$$a_k = \frac{(x, e_k)}{\| e_k \|^2}, \quad b_k = \frac{(y, e_k)}{\| e_k \|^2},$$

поэтому имеем

$$\left(x - \sum_{k=1}^{n} a_k e_k, \quad y - \sum_{k=1}^{n} b_k e_k\right) = (x, y) - \sum_{k=1}^{n} b_k (x, e_k) -$$

$$- \sum_{k=1}^{n} a_k (y, e_k) + \sum_{k=1}^{n} a_k b_k (e_k, e_k) = (x, y) - \sum_{k=1}^{n} a_k b_k \| e_k \|^2. \tag{58.44}$$

Из полноты системы e_k, $k = 1, 2, \ldots,$ имеем

$$\lim_{n \to \infty} \left(x - \sum_{k=1}^{n} a_k e_k\right) = 0, \quad \lim_{n \to \infty} \left(y - \sum_{k=1}^{n} b_k e_k\right) = 0,$$

поэтому в силу непрерывности скалярного произведения при $n \to \infty$ левая часть равенства (58.44) стремится к нулю, следовательно, это имеет место и для правой части, т. е.

$$\lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{n} a_k b_k \| e_k \|^2 = (x, y).$$

Лемма доказана.

Лемма 2. *Пусть R — гильбертово пространство, e_k, $k = 1, 2, \ldots,$ — ортонормированный базис в R и a_k, $k = 1, 2, \ldots,$*

— последовательность чисел, таких, что ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k^2$ *сходится. Тогда ряд* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k e_k$ *сходится в пространстве* R, *и если* $y = \sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k e_k$, *то* a_k, $k=1, 2, \ldots$, *— коэффициенты Фурье элемента* y.

Доказательство. Если $s_n = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k e_k$, то

$$\|s_{n+p} - s_n\|^2 = \left(\sum_{k=n+1}^{n+p} a_k e_k, \sum_{k=n+1}^{n+p} a_k e_k \right) =$$

$$= \sum_{k=n+1}^{n+p} a_k^2, \quad n=1, 2, \ldots, p=0, 1, \ldots,$$

и в силу сходимости ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k^2$ он удовлетворяет критерию Коши для сходящихся рядов. Отсюда следует, что последовательность $\{s_n\}$ является фундаментальной в пространстве R и, следовательно, сходится.

Пусть

$$y = \lim_{n \to \infty} s_n, \quad \text{т. е.} \quad y = \sum_{k=1}^{\infty} a_k e_k,$$

тогда в силу единственности разложения элемента пространства по базису (см. замечание к теореме 7)

$$(y, e_k) = a_k, \quad k = 1, 2, \ldots .$$

Лемма доказана

Доказательство теоремы 9. Пусть R и R' — два сепарабельных бесконечномерных гильбертовых пространства. Согласно теореме 8, в них существуют ортонормированные базисы, соответственно e_k, $k = 1, 2, \ldots$, и e'_k, $k = 1, 2, \ldots$.

Пусть $x \in R$ и пусть $x = \sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k e_k$, тогда a_k — коэффициенты Фурье элемента x и, следовательно, по равенству Парсеваля ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k^2$ сходится. Положим $x' = \sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k e'_k$. Согласно лемме 2, это имеет смысл.

Отображение пространства R в пространство R', ставящее в соответствие каждому элементу $x \in R$ указанный элемент $x' \in R'$, и осуществляет изоморфизм этих пространств. Действительно, при

этом соответствии в силу единственности разложения элемента по базису разным элементам пространства R соответствуют разные элементы пространства R'. Далее, всякий элемент пространства R' поставлен в соответствие некоторому элементу пространства R (т. е. указанное отображение является отображением на пространство R'); в самом деле, если $x' \in R'$, то, разложив его в R' по базису, получим

$$x' = \sum_{k=1}^{\infty} a_k' e_k'.$$

Пусть

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} a_k' e_k$$

(такой элемент существует, см. лемму 2). Очевидно, что элементу x и соответствует при установленном соответствии элемент x'.

Покажем, наконец, что при этом соответствии сохраняется скалярное произведение. Это сразу следует из леммы 1. Действительно, если

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} a_k e_k, \quad y = \sum_{k=1}^{\infty} b_k e_k,$$
$$x' = \sum_{k=1}^{\infty} a_k e_k', \quad y' = \sum_{k=1}^{\infty} b_k e_k',$$

то в силу указанной леммы

$$(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k b_k = (x', y').$$

Теорема доказана.

В качестве модели сепарабельного бесконечномерного гильбертова пространства можно взять пространство, элементами которого являются последовательности вещественных чисел

$$x = (x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots),$$

для которых ряд $\sum_{k=1}^{\infty} x_k^2$ сходится. Операции в этом пространстве вводятся естественным образом. Если

$$x = (x_1, x_2, \ldots, x_k, \ldots) \quad \text{и} \quad y = (y_1, y_2, \ldots, y_k, \ldots),$$

то полагаем

$$x + y = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots, x_k + y_k, \ldots),$$
$$\lambda x = (\lambda x_1, \lambda x_2, \ldots, \lambda x_k, \ldots) \quad (\lambda \text{ — число}),$$

$$(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} x_k y_k,$$

и, следовательно,

$$\|x\| = \sqrt{\sum_{k=1}^{\infty} x_k^2}.$$

Все эти определения имеют смысл, ибо из сходимости рядов $\sum_{k=1}^{\infty} x_k^2$ и $\sum_{k=1}^{\infty} y_k^2$ вытекает и сходимость рядов

$$\sum_{k=1}^{\infty} (x_k + y_k)^2, \quad \sum_{k=1}^{\infty} \lambda x_k^2, \quad \sum_{k=1}^{\infty} x_k y_k.$$

Действительно, для второго ряда это очевидно, сходимость же третьего и первого ряда вытекает соответственно из неравенств

$$x_k y_k \leqslant \frac{x_k^2 + y_k^2}{2},$$

$$(x_k + y_k)^2 = x_k^2 + 2x_k x_k + y_k^2 \leqslant 2(x_k^2 + y_k^2).$$

Полученное пространство обозначается l_2.

Теорема 10. *Пространство l_2 является сепарабельным гильбертовым пространством.*

Доказательство. Пространство l_2 сепарабельно, ибо последовательности e_k, $k = 1, 2, \ldots$, у которых на всех местах стоят нули кроме k-го, где стоит единица, образуют ортонормированный базис и, следовательно, их линейные комбинации плотны в l_2.

Полнота пространства l_2 доказывается несколько сложнее. Пусть последовательность

$$x^{(k)} = \left(x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \ldots, x_n^{(k)}, \ldots\right), \quad k = 1, 2, \ldots, \tag{58.45}$$

является фундаментальной последовательностью пространства l_2. Тогда из неравенства

$$\|x^{(k+p)} - x^{(k)}\| = \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} \left(x_n^{(k+p)} - x_n^{(k)}\right)^2} \geqslant \left|x_n^{(k+p)} - x_n^{(k)}\right|,$$

$$k = 1, 2, \ldots, \quad p = 0, 1, 2, \ldots, \quad n = 1, 2, \ldots,$$

и фундаментальности последовательности (58.45) следует, что при любом фиксированном n числовая последовательность $x_n^{(k)}$, $k = 1, 2, \ldots$, удовлетворяет критерию Коши (см. п. 3.2) и, следовательно, сходится. Пусть $\lim\limits_{k \to \infty} x_n^{(k)} = x_n$. В силу фундаментальности последо-

вательности (58.45) для любого $\varepsilon > 0$ существует такой номер k_ε, что при любом номере $k \geqslant k_\varepsilon$ и любом натуральном p выполняется неравенство

$$\| x^{(k+p)} - x^{(k)} \| < \varepsilon,$$

т. е.

$$\sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} \left(x_n^{(k+p)} - x_n^{(k)}\right)^2} < \varepsilon.$$

Отсюда для любого фиксированного натурального числа m и подавно

$$\sum_{n=1}^{m} \left(x_n^{(k+p)} - x_n^{(k)}\right)^2 < \varepsilon^2.$$

Переходя здесь к пределу при $p \to \infty$, получим

$$\sum_{n=1}^{m} \left(x_n - x_n^{(k)}\right)^2 \leqslant \varepsilon^2,$$

и так как это верно при любом $m = 1, 2, \ldots$, то

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(x_n - x_n^{(k)}\right)^2 \leqslant \varepsilon^2, \quad k \geqslant k_\varepsilon. \tag{58.46}$$

Таким образом, точка $y^{(k)} = (x_1 - x_1^{(k)}, \ldots, x_n - x_n^{(k)}, \ldots)$, $k \geqslant k_\varepsilon$, принадлежит пространству l_2, но тогда и точка $x = (x_1, \ldots, x_n, \ldots) = x^{(k)} + y^{(k)}$ также принадлежит пространству l_2, а условие (58.46) означает, что

$$\lim_{k \to \infty} x^{(k)} = x.$$

Итак, мы доказали, что последовательность (58.45) сходится. Следовательно, l_2 — полное пространство.

Теорема доказана.

В силу теоремы 9 пространство l_2 изоморфно каждому сепарабельному гильбертову пространству. В дальнейшем мы увидим (см. п. 58.5), что пространство $L_2[a, b]$ также сепарабельно и, следовательно, изоморфно пространству l_2. Можно показать, что и пространство $L_2(G)$, где G — кубируемое множество n-мерного пространства, также сепарабельно и, следовательно, изоморфно l_2. Таким образом, все гильбертовы пространства интегрируемых в квадрате функций независимо от числа переменных, от которых зависят эти функции, изоморфны между собой.

58.5. Некоторые следствия для классических рядов Фурье и рядов Фурье по полиномам Лежандра

В § 55 мы изучали классические ряды Фурье для абсолютно интегрируемых функций. В этом пункте мы рассмотрим некоторые вопросы для классических рядов Фурье более узкого класса функций, а именно для функций $f \in L_2[-\pi, \pi]$ (ср. с п. 55.8).

Лемма 1. *Пусть Φ — некоторое множество непрерывных на отрезке $[a, b]$ функций и пусть Φ плотно в пространстве $C[a, b]$*), тогда оно плотно и в пространстве $L_2[a, b]$.*

Доказательство. Обозначим через $\|f\|_C$ норму функции f в пространстве $C[a, b]$, а через $\|f\|_{L_2}$ — ее норму в пространстве $L_2[a, b]$, т. е.

$$\|f\|_C = \max_{a \leqslant x \leqslant b} |f(x)|, \quad \|f\|_{L_2} = \sqrt{\int_a^b f^2(x)\,dx}.$$

Тогда, очевидно,

$$\|f\|_{L_2} = \sqrt{\int_a^b f^2(x)\,dx} \leqslant \max_{a \leqslant x \leqslant b} |f(x)| \sqrt{\int_a^b dx} = \|f\|_C \sqrt{b-a}. \quad (58.47)$$

Обозначим, как и выше, через $L_2^C = L_2^C[a, b]$ подпространство непрерывных функций пространства $L_2 = L_2[a, b]$. В силу определения пространства $L_2[a, b]$ (см. п. 57.4) имеем $\overline{L_2^C} = L_2$. Поэтому, каков бы ни был элемент $g \in L_2$ и каково бы ни было число $\varepsilon > 0$, существует непрерывная функция $f \in L_2^C[a, b]$ такая, что

$$\|g - f\|_{L_2} < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Далее, из плотности множества Φ в пространстве $C[a, b]$ следует, что для функции f существует функция $\varphi \in \Phi$, такая, что

$$\|f - \varphi\|_C < \frac{\varepsilon}{2\sqrt{b-a}},$$

но тогда в силу неравенства (58.47)

$$\|f - \varphi\|_{L_2} < \frac{\varepsilon}{2},$$

и потому

$$\|g - \varphi\|_{L_2} \leqslant \|g - f\|_{L_2} + \|f - \varphi\|_{L_2} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

---

*) Определение пространства $C[a, b]$ см. в п. 57.3 (формула (57.10)).

Таким образом, Φ плотно в $L_2[a, b]$.

Лемма доказана.

Возьмем в качестве Φ множество многочленов; согласно теореме Вейерштрасса (см. теорему 7 п. 55.6) оно плотно в пространстве $C[a, b]$; из леммы следует, что это множество плотно и в $L_2[a, b]$, следовательно, последовательность неотрицательных целых степеней x полна в $L_2[a, b]$.

Итак, доказана следующая теорема.

Теорема 11. *Последовательность неотрицательных целых степеней x полна в пространствах $C[a, b]$ и $L_2[a, b]$, $-\infty < a < b < +\infty$.*

Следствие. *Пространства $C[a, b]$ и $L_2[a, b]$ являются сепарабельными пространствами.*

Действительно, существование последовательности элементов, образующих полную систему, и означает по определению (см. п. 57.3) сепарабельность пространства.

Линейные оболочки системы неотрицательных целых степеней x (58.11) и системы полиномов Лежандра (58.3) в пространстве $L_2[-1; 1]$ совпадают (полиномы Лежандра могут быть получены процессом ортогонализации системы (58.11)), поэтому справедлива следующая теорема.

Теорема 12. *Полиномы Лежандра* (58.3) *образуют полную ортогональную систему* (*ортогональный базис*) *в пространстве $L_2[-1; 1]$.*

Обозначим через $C^*[-\pi, \pi]$ подпространство пространства $C[-\pi, \pi]$, состоящее из всех таких непрерывных функций f, что $f(\pi) = f(-\pi)$.

Из полноты тригонометрической системы (58.2) в пространстве $C^*[-\pi, \pi]$ (см. теорему 6′ из п. 55.7) сразу следует в силу неравенства (58.47) ее полнота в подпространстве пространства $L_2[-\pi, \pi]$, состоящем из непрерывных функций на отрезке $[-\pi, \pi]$, удовлетворяющих условию $f(-\pi) = f(\pi)$. Это, впрочем, было доказано и раньше: см. теорему 8 из п. 55.7.

Докажем более сильное утверждение.

Теорема 13. *Тригонометрическая система* (58.2) *образует полную ортогональную систему* (*ортогональный базис*) *в пространстве $L_2[-\pi, \pi]$.*

Доказательство. Пусть $g \in L_2[-\pi, \pi]$ и пусть фиксировано число $\varepsilon > 0$, тогда существует непрерывная на отрезке $[-\pi, \pi]$ функция f, такая, что

$$\|g - f\|_{L_2} < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{58.48}$$

Функция f в силу непрерывности ограничена: $|f(x)| \leqslant M$, $-\pi \leqslant x \leqslant \pi$. Выберем число $\delta > 0$ так, чтобы

$$\delta < \left(\frac{\varepsilon}{6M}\right)^2$$

и положим (рис. 176)

$$\varphi(x) = \begin{cases} f(x) \text{ для } -\pi \leqslant x \leqslant \pi - \delta, \\ f(\pi - \delta) + \frac{f(-\pi) - f(\pi - \delta)}{\delta}(x - \pi + \delta) \quad \text{для} \quad \pi - \delta < x \leqslant \pi. \end{cases}$$

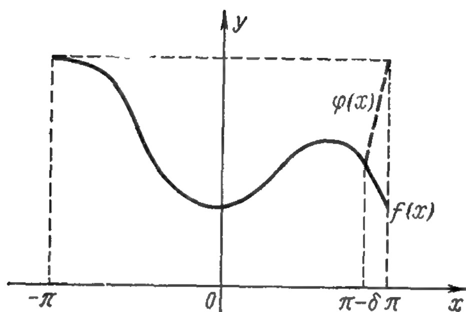


Рис. 176

Функция φ также непрерывна на отрезке $[-\pi, \pi]$ и $|\varphi(x)| \leqslant M$, $-\pi \leqslant x \leqslant \pi$, кроме того, $\varphi(-\pi) = \varphi(\pi)$ и

$$\|f - \varphi\|_{L_2} = \left\{\int_{-\pi}^{\pi} [f(x) - \varphi(x)]^2 \, dx\right\}^{\frac{1}{2}} = \left\{\int_{\pi-\delta}^{\pi} [f(x) - \varphi(x)]^2 \, dx\right\}^{\frac{1}{2}} \leqslant$$

$$\leqslant 2M \left(\int_{\pi-\delta}^{\pi} dx\right)^{\frac{1}{2}} = 2M\delta^{\frac{1}{2}} < \frac{\varepsilon}{3}. \qquad (58.49)$$

Наконец, в силу полноты тригонометрической системы (58.2) в пространстве $C^*[-\pi, \pi]$ следует существование тригонометрического полинома $T = T(x)$, такого, что

$$\|\varphi - T\|_C < \frac{\varepsilon}{3\sqrt{2\pi}}.$$

Тогда из неравенства (58.47) следует также, что

$$\|\varphi - T\|_{L_2} < \frac{\varepsilon}{3}. \qquad (58.50)$$

Теперь из неравенств (58.48), (58.49) и (58.50) получаем

$$\|g-T\|_{L_2} \leqslant \|g-f\|_{L_2} + \|f-\varphi\|_{L_2} + \|\varphi+T\|_{L_2} < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon,$$

что и означает полноту тригонометрической системы (58.2) в пространстве $L_2[-\pi, \pi]$.

Теорема доказана.

Из доказанной теоремы о полноте тригонометрической системы и общей теории разложений элементов по ортогональному базису в гильбертовых пространствах можно получить ряд следствий для классических рядов Фурье. Например, справедливы следующие две теоремы.

Теорема 14. *Если функция* $f \in L_2[-\pi, \pi]$, *то:*

1) *она является пределом в смысле среднего квадратичного* (см. п. 55.7 и 57.5) *своих частичных сумм Фурье* $S_n(x)$ *при* $n \to \infty$, *т. е.*

$$\lim_{n\to\infty} \int_{-\pi}^{\pi} [f(x) - S_n(x)]^2 \, dx = 0;$$

2) *справедливо равенство Парсеваля*

$$\frac{1}{\pi} \|f\|_{L_2}^2 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\, dx = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 + b_n^2. \tag{58.51}$$

Следствие. *Если функция* $f \in L_2[-\pi, \pi]$ *и все ее коэффициенты Фурье по тригонометрической системе* (58.2) *равны нулю, то она является нулем пространства* $L_2[-\pi, \pi]$.

Эта теорема, согласно теоремам 4 и 5 настоящего параграфа (см. п. 58.3), непосредственно следует из доказанной выше полноты тригонометрической системы в гильбертовом пространстве $L_2[-\pi, \pi]$. Следствие же вытекает очевидным образом из равенства (58.51).

Из равенства Парсеваля (58.51) еще раз (независимо от теоремы 2 п. 55.2) следует, что коэффициенты Фурье функции f стремятся к нулю, однако лишь для функций из $L_2[a, b]$.

Теорема 15. *Если все коэффициенты Фурье непрерывной на отрезке* $[-\pi, \pi]$ *функции равны нулю, то сама эта функция тождественно равна нулю.*

Это непосредственно вытекает из следствия предыдущей теоремы и из того, что из равенства нулю нормы в L_2 непрерывной функции следует ее тождественное равенство нулю (см. п. 57.3).

Следствие. *Если две непрерывные функции имеют одинаковые коэффициенты Фурье, то они тождественно равны.*

Это непосредственно вытекает из теоремы.

В заключение, используя полученные результаты, докажем еще одну теорему.

Теорема 16. *Пусть функция f непрерывна на отрезке $[-\pi, \pi]$. Если ее ряд Фурье сходится равномерно на отрезке $[-\pi, \pi]$, то его сумма равна функции f.*

Доказательство. Пусть

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx$$

и пусть

$$S(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx.$$

Прежде всего, функция $S(x)$, как сумма равномерно сходящегося ряда непрерывных функций, также непрерывна. Далее, в силу теоремы 1 п. 55.1 коэффициентами Фурье функции $S(x)$ являются числа a_0, a_n, b_n, $n = 1, 2, \ldots$.

Таким образом, две непрерывные на отрезке $[-\pi, \pi]$ функции f и S имеют одинаковые коэффициенты Фурье, и поэтому в силу сказанного выше они совпадают во всех точках отрезка $[-\pi, \pi[$:

$$f(x) = S(x), \quad -\pi \leqslant x \leqslant \pi.$$

Теорема доказана.

58.6. Преобразование Фурье интегрируемых в квадрате функций. Теорема Планшереля

Если квадрат функции f интегрируем на всей вещественной оси, то сама функция f, вообще говоря, не абсолютно интегрируема на всей оси, как это видно на примере функции

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}.$$

Поэтому на основании теории преобразования Фурье, изложенной в § 56, нельзя утверждать существование преобразования Фурье для функций из пространства $L_2(-\infty, \infty)$. Покажем, что в этом случае можно определить преобразование Фурье в некотором обобщенном смысле. Предварительно остановимся на определении пространства $L_2(-\infty, +\infty)$ для комплекснозначных функций.

Пусть f и g — две непрерывные функции с интегрируемым квадратом модуля на всей оси и принимающие, вообще говоря, комплексные значения. Их скалярное произведение определяется в этом случае по формуле

$$(f, g) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \overline{g(x)}\, dx.$$

Легко проверяется, что все свойства, которыми должно обладать скалярное произведение в комплексном линейном пространстве (см. п. 55.4), в этом случае выполняются.

Пространство $L_2(-\infty, \infty)$, которое мы будем рассматривать в этом пункте, определяется как пополнение предгильбертова пространства непрерывных и с интегрируемым на всей оси квадратом модуля комплекснозначных функций с указанным скалярным произведением.

Через $\|f\|$ в настоящем параграфе обозначается норма элемента $f \in L_2(-\infty, +\infty)$, т. е.

$$\|f\| = \sqrt{(f, f)},$$

а также и квазинорма

$$\|f\| = \sqrt{\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \overline{f}(x)\, dx}$$

для функций f с интегрируемым на всей оси квадратом модуля. Выше для случая вещественных функций отмечалось без доказательства (см. п. 57.5), что каждый элемент пространства L_2 можно рассматривать как класс функций. Аналогичный факт справедлив и для пространства L_2 комплекснозначных функций, причем квазинорма $\|f\|$ функций f совпадает с нормой элемента пространства L_2, которому принадлежит (в смысле, аналогичном указанному в п. 57.5) функция f. Мы не будем останавливаться на доказательстве этих фактов и не будем их использовать в дальнейшем.

Комплекснозначную функцию $f(x) = \varphi(x) + i\psi(x)$, где $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ — вещественные функции, $-\infty < x < +\infty$, назовем *ступенчатой*, если ступенчатыми являются функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ (см. определение 4 в п. 55.2). Любые две ступенчатые функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ можно представить в виде конечной линейной комбинации одних и тех же одноступенчатых функций (см. п. 55.2), принимающих значения 1 и 0. Для этого достаточно взять всевозможные непустые пересечения полуинтервалов постоянства функций $\varphi(x)$ и $\psi(x)$. Эти пересечения также являются полуинтервалами $[x_{k-1}, x_k)$, $k = 1, 2, \ldots, n$, на которых постоянны одновременно функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$. Поэтому, если

$$\omega_k(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x_{k-1} \leqslant x < x_k \\ 0, & \text{если } x < x_{k-1} \text{ или } x \geqslant x_k, \end{cases}$$
$$k = 1, 2, \ldots, n,$$

— соответствующие одноступенчатые функции, то

$$\varphi(x) = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \omega_k(x), \quad \psi(x) = \sum_{k=1}^{n} \mu_k \omega_k(x).$$

Отсюда следует, что любая комплекснозначная ступенчатая функция $f(x) = \varphi(x) + i\psi(x)$ представима в виде

$$f(x) = \sum_{k=1}^{n} \zeta_k \omega_k(x), \tag{58.52}$$

где $\zeta_k = \lambda_k + i\mu_k$, $k = 1, 2, \ldots, n$, — комплексные числа.

Лемма 1. *Пусть f — комплекснозначная ступенчатая функция и $F[f]$ — ее преобразование Фурье, тогда*

$$\|F[f]\| = \|f\|.$$

Доказательство. Если функция f задана формулой (58.52), то

$$\|f\|^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\overline{f(x)}\,dx =$$
$$= \sum_{j,\,k=1}^{n} \zeta_j \overline{\zeta_k} \int_{-\infty}^{+\infty} \omega_j(x)\,\omega_k(x)\,dx = \sum_{k=1}^{n} |\zeta_k|^2 (x_k - x_{k-1}). \tag{58.53}$$

Пусть теперь $0 < \eta < +\infty$, тогда

$$\int_{-\eta}^{\eta} F[f]\,\overline{F[f]}\,dy = \frac{1}{2\pi} \int_{-\eta}^{\eta} dy \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,e^{-ixy}\,dx \int_{-\infty}^{+\infty} \overline{f(\xi)}\,e^{i\xi y}\,d\xi =$$
$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\overline{f(\xi)}\,dx\,d\xi \int_{-\eta}^{\eta} e^{iy(\xi - x)}\,dy =$$
$$= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\overline{f(\xi)}\,\frac{\sin \eta(\xi - x)}{\xi - x}\,dx\,d\xi. \tag{58.54}$$

Все преобразования здесь законны, так как на самом деле все интегралы берутся в конечных пределах.

Поскольку вещественная и мнимая части функции $f(x)$ удовлетворяют условиям теоремы о представлении функций с помощью

интеграла Фурье (см. теорему 1 в п. 56.1), то для всех x, кроме $x = x_k$, $k = 1, 2, \ldots, n$, имеем (см. доказательство указанной теоремы)

$$\lim_{\eta\to+\infty}\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\overline{f(\xi)}\,\frac{\sin\eta(\xi-x)}{\xi-x}\,d\xi=\overline{f(x)}.$$

Оказывается, что в силу этого при наших предположениях в последнем интеграле (58.54) можно перейти к пределу под знаком интеграла при $\eta\to+\infty$. Однако соответствующая теорема не была доказана в настоящем курсе, и потому нам придется сделать несколько дополнительных вычислений.

Подставляя (58.52) в (58.54), получим

$$\int_{-\eta}^{\eta}F[f]\,\overline{F[f]}\,dy=$$

$$=\frac{1}{\pi}\sum_{j,\,k=1}^{n}\zeta_j\overline{\zeta_k}\int_{x_{j-1}}^{x_j}dx\int_{x_{k-1}}^{x_k}\frac{\sin\eta(\xi-x)}{\xi-x}\,d\xi=$$

$$=\frac{1}{\pi}\sum_{j,\,k=1}^{n}\zeta_j\overline{\zeta_k}\int_{x_{j-1}}^{x_j}dx\int_{\eta(x_{k-1}-x)}^{\eta(x_k-x)}\frac{\sin t}{t}\,dt. \qquad (58.55)$$

Рассмотрим поведение каждого слагаемого получившейся суммы при $\eta\to+\infty$.

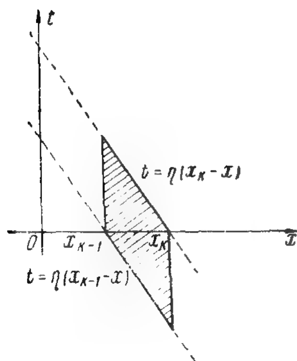


Рис. 177

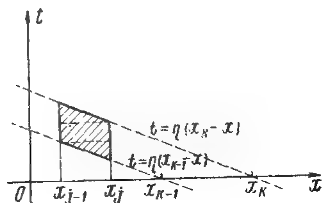


Рис. 178

Если $j = k$, то, меняя порядок интегрирования (рис. 177) и производя интегрирование по переменной x, получим

$$\frac{1}{\pi}\int_{x_{k-1}}^{x_k}dx\int_{\eta(x_{k-1}-x)}^{\eta(x_k-x)}\frac{\sin t}{t}\,dt=$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[\int_0^{\eta(x_k-x_{k-1})}\left(x_k-x_{k-1}-\frac{t}{\eta}\right)\frac{\sin t}{t}\,dt+\int_{-\eta(x_k-x_{k-1})}^{0}\left(x_k-x_{k-1}+\frac{t}{\eta}\right)\frac{\sin t}{t}\,dt\right]=$$

$$=\frac{2}{\pi}(x_k-x_{k-1})\int_0^{\eta(x_k-x_{k-1})}\frac{\sin t}{t}\,dt+\frac{2}{\pi\eta}[1-\cos\eta(x_k-x_{k-1})].$$

Поскольку

$$\int_0^{+\infty}\frac{\sin t}{t}\,dt=\frac{\pi}{2}$$

(см. п. 54.3), то

$$\lim_{\eta\to+\infty}\frac{2}{\pi}(x_k-x_{k-1})\int_0^{\eta(x_k-x_{k-1})}\frac{\sin t}{t}\,dt=x_k-x_{k-1}.$$

Далее, очевидно,

$$\lim_{\eta\to+\infty}\frac{2}{\pi\eta}[1-\cos\eta(x_k-x_{k-1})]=0.$$

Поэтому

$$\lim_{\eta\to+\infty}\frac{1}{\pi}\int_{x_{k-1}}^{x_k}dx\int_{\eta(x_{k-1}-x)}^{\eta(x_k-x)}\frac{\sin t}{t}\,dt=x_k-x_{k-1},\quad k=1,2,\ldots,n.$$

Покажем теперь, что при $j\neq k$

$$\lim_{\eta\to+\infty}\int_{x_{j-1}}^{x_j}dx\int_{\eta(x_{k-1}-x)}^{\eta(x_k-x)}\frac{\sin t}{t}\,dt=0.$$

Пусть для определенности $x_{j-1}<x_j\leqslant x_{k-1}<x_k$. При других расположениях полуинтервалов постоянства $[x_{j-1}, x_j)$ и $[x_{k-1}, x_k)$ доказательство аналогично. Меняя снова порядок интегрирования и производя интегрирование по x (рис. 178), с помощью аналогичных рассуждений получим

$$\int_{x_{j-1}}^{x_j}dx\int_{\eta(x_{k-1}-x)}^{\eta(x_{k-1}-x)}\frac{\sin t}{t}\,dt=\int_{\eta(x_k-x_j)}^{\eta(x_k-x_{j-1})}\left(x_k-x_{j-1}-\frac{t}{\eta}\right)\frac{\sin t}{t}\,dt+$$

$$+\int_{\eta(x_{k-1}-x_{j-1})}^{\eta(x_k-x_j)}(x_j-x_{j-1})\frac{\sin t}{t}\,dt+$$

$$+\int\limits_{\eta(x_{k-1}-x_j)}^{\eta(x_{k-1}-x_{j-1})}\left(x_j-x_{k-1}+\frac{t}{\eta}\right)\frac{\sin t}{t}\,dt\to 0\quad \text{при}\ \eta\to\infty.$$

Теперь из (58.55) и (58.54) имеем

$$\|F[f]\|^2=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}F[f]\overline{F[f]}\,dx=\lim_{\eta\to+\infty}\int\limits_{-\eta}^{\eta}F[f]\overline{F[f]}\,dy=$$

$$=\sum_{k=1}^{n}|\zeta_k|^2(x_k-x_{k-1})=\|f\|^2.$$

Лемма доказана.

Лемма 2. *Пусть f — комплекснозначная функция, непрерывная на отрезке $[a, b]$ и равна нулю вне его, тогда существует последовательность таких ступенчатых функций φ_n, $n = 1, 2, \ldots,$ что*

$$\lim_{n\to\infty}\|\varphi-\varphi_n\|=0.$$

Доказательство. Для вещественных функций это было доказано раньше: см. замечание в п. 55.2. Пусть теперь $\varphi = u + iv$ — комплекснозначная функция, непрерывная на отрезке $[a, b]$, тогда вещественные функции u и v также непрерывны на отрезке $[a, b]$. Поэтому существуют такие последовательности ступенчатых функций $\{u_n\}$ и $\{v_n\}$, что $\|u - u_n\| \to 0$ и $\|v - v_n\| \to 0$ при $n\to\infty$. Если $\varphi_n = u_n + iv_n$, то $\|\varphi - \varphi_n\| \leqslant \|u - u_n\| + \|v - v_n\|$, отсюда $\|\varphi - \varphi_n\| \to 0$ при $n\to\infty$.

Лемма доказана.

Лемма 3. *Пусть комплекснозначная функция φ непрерывна на отрезке $[a, b]$ и равна нулю вне его, тогда*

$$\|F[\varphi]\|=\|\varphi\|.$$

Доказательство. Пусть φ_n — последовательность ступенчатых функций, таких, что

$$\lim_{n\to\infty}\|\varphi-\varphi_n\|=0.$$

(см. лемму 2), тогда в силу непрерывности нормы

$$\lim_{n\to\infty}\|\varphi_n\|=\|\varphi\|. \tag{58.56}$$

Из неравенства же Коши—Буняковского получим

$$\int\limits_a^b|\varphi_n(x)-\varphi(x)|\,dx\leqslant\left(\int\limits_a^b dx\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int\limits_a^b|\varphi_n(x)-\varphi(x)|^2\,dx\right)^{\frac{1}{2}}=$$

$$= (b-a)^{\frac{1}{2}} \left(\int_a^b |\varphi_n(x) - \varphi(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}},$$

и, следовательно,

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b |\varphi_n(x)-\varphi(x)| \, dx = 0,$$

т. е. последовательность $\{\varphi_n\}$ сходится в среднем к функции φ и в смысле L_1. Поэтому, если

$$\psi = F[\varphi], \quad \psi_n = F[\varphi_n], \quad n = 1, 2, \ldots,$$

то последовательность непрерывных (см. лемму 4 в п. 56.3) функций $\{\psi_n\}$ равномерно сходится к функции ψ, которая в силу этого непрерывна на всей числовой оси. Кроме того, в силу леммы 1

$$\|\psi_n\| = \|\varphi_n\|. \tag{58.57}$$

Отсюда следует, в частности, что непрерывные функции ψ_n являются функциями с интегрируемым квадратом модуля, т. е. принадлежат пространству $L_2(-\infty, +\infty)$. Далее, функции ψ_n, $n = 1, 2, \ldots$, образуют фундаментальную последовательность в пространстве $L_2(-\infty, +\infty)$. Это следует из сходимости в среднем в смысле L_2 последовательности $\{\varphi_n\}$ и из равенства

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\psi_n(y) - \psi_m(y)|^2 dy = \int_{-\infty}^{+\infty} |\varphi_n(y) - \varphi_m(y)|^2 dy,$$

которое также вытекает из леммы 1, ибо разность ступенчатых функций также является ступенчатой функцией.

Покажем, что последовательность $\{\psi_n\}$ сходится к функции ψ и в пространстве L_2. Действительно, пусть фиксировано $\varepsilon > 0$, тогда в силу фундаментальности последовательности $\{\psi_n\}$ существует такой номер n_ε, что для всех $n \geqslant n_\varepsilon$ и $m \geqslant n_\varepsilon$ выполняется неравенство

$$\|\psi_n - \psi_m\|^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} |\psi_n(y) - \psi_m(y)|^2 dy < \varepsilon.$$

Тем более, для любого числа $c > 0$ будем иметь

$$\int_{-c}^{c} |\psi_n(y) - \psi_m(y)|^2 dy < \varepsilon. \tag{58.58}$$

При фиксированных n и c при $m \to \infty$ подынтегральное выражение в (58.58) равномерно стремится к функции $|\psi_n(y) - \psi(y)|^2$. Поэтому

в неравенстве (58.58) можно перейти к пределу под знаком интеграла при $m \to \infty$. В результате будем иметь

$$\int_{-c}^{c} |\psi_n(y) - \psi(y)|^2 \, dy \leqslant \varepsilon.$$

Устремляя теперь c к $+\infty$, получим, что при $n \geqslant n_\varepsilon$ выполняется неравенство

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\psi_n(y) - \psi(y)|^2 \, dy \leqslant \varepsilon, \qquad (58.59)$$

что и означает сходимость в среднем в смысле L_2 последовательности $\{\psi_n\}$ к функции ψ.

Из доказанного следует также, что $\psi \in L_2(-\infty, +\infty)$. Действительно, в силу (58.57) и (58.59)

$$\|\psi\| \leqslant \|\psi - \psi_n\| + \|\psi_n\| < +\infty.$$

Наконец, из неравенства (57.14) и того что $\lim\limits_{n \to \infty} \|\psi_n - \psi\| = 0$, получим

$$\lim_{n \to \infty} \|\psi_n\| = \|\psi\|. \qquad (58.60)$$

Из (58.56), (58.57) и (58.60) следует, что

$$\|\psi\| = \|\varphi\|.$$

Лемма доказана.

Теорема 17 (Планшерель*)). *Пусть функция φ непрерывна и с интегрируемым квадратом модуля на всей числовой оси и пусть*

$$\psi_M(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-M}^{M} \varphi(x) e^{-ixy} \, dx, \quad M > 0.$$

Тогда

1) функция $\psi_M(y)$ так же непрерывна и с интегрируемым квадратом,

2) при $M \to +\infty$ функции ψ_M сходятся в пространстве $L_2(-\infty, +\infty)$ к некоторому элементу $\psi \in L_2(-\infty, +\infty)$ и

3) $\|\varphi\| = \|\psi\|$.

Доказательство. Если

$$\varphi_M(x) = \begin{cases} \varphi(x), & \text{если } x \in [-M, M], \\ 0, & \text{если } x \notin [-M, M], \end{cases}$$

то, очевидно,

$$\psi_M = F[\varphi_M],$$

*) М. Планшерель (род. 1885 г.) — швейцарский математик.

$$\lim_{M \to +\infty} \varphi_M = \varphi \text{ в } L_2(-\infty, +\infty), \tag{58.61}$$

$$\lim_{M \to +\infty} \|\varphi_M\| = \|\varphi\|. \tag{58.62}$$

Согласно лемме 3,

$$\|\psi_M\| = \|\varphi_M\|, \; M > 0, \tag{58.63}$$

$$\|\psi_{M_1} - \psi_{M_2}\| = \|\varphi_{M_1} - \varphi_{M_2}\|, \; M_1 > 0, \; M_2 > 0. \tag{58.64}$$

Из (58.61) и (58.64) следует в силу полноты пространства $L_2(-\infty, \infty)$, что существует предел (почему?)

$$\lim_{M \to +\infty} \psi_M = \psi \text{ в } L_2(-\infty, +\infty).$$

В силу непрерывности нормы

$$\lim_{M \to +\infty} \|\psi_M\| = \|\psi\| \tag{58.65}$$

из (58.62), (58.63) и (58.65) имеем

$$\|\psi\| = \|\varphi\|.$$

Теорема доказана.

Полученный в процессе доказательства элемент $\psi \in L_2(-\infty, +\infty)$ мы будем также называть *преобразованием Фурье* заданной непрерывной функции $\varphi \in L_2(-\infty, +\infty)$ и писать

$$\psi = F[\varphi]. \tag{58.66}$$

Эта запись естественна, так как если функция φ, кроме того, и абсолютно интегрируема, то $\lim\limits_{M \to +\infty} \psi_M$ совпадает с обычным преобразованием Фурье. Действительно, в этом случае

$$\lim_{M \to +\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} |\varphi_M(x) - \varphi(x)| \, dx = 0.$$

Следовательно, функции $\psi_M = F[\varphi_M]$ при $M \to +\infty$ равномерно сходятся к преобразованию Фурье $F[\varphi]$ функции φ. Как мы видели, ψ_M сходится в среднем в смысле L_2 к функции ψ; отсюда нетрудно убедиться, что $\psi = F[\varphi]$ (сравнить аналогичное рассуждение в доказательстве леммы 3).

Преобразование Фурье (58.66) определено пока лишь для тех элементов $\varphi \in L_2(-\infty, +\infty)$, которые являются непрерывными функциями с интегрируемым квадратом, однако по непрерывности оно может быть распространено на все пространство $L_2(-\infty, +\infty)$. Действительно, пусть φ — произвольный элемент из пространства $L_2(-\infty, +\infty)$. Согласно определению пространства L_2

множество непрерывных функций плотно в нем. Следовательно, существует последовательность непрерывных функций

$$\varphi_n \in L_2(-\infty, +\infty),\ n=1, 2, \ldots,$$

такая, что $\lim\limits_{n\to\infty} \varphi_n=\varphi$.

Пусть $F[\varphi_n]=\psi_n$, $n=1, 2, \ldots$. В силу теоремы Планшереля

$$\|\psi_n-\psi_m\|=\|\varphi_n-\varphi_m\|;\ n,\ m=1, 2, \ldots,$$

поэтому последовательность $\{\psi_n\}$ фундаментальна в L_2 и, следовательно, сходится. Пусть $\psi=\lim\limits_{n\to\infty}\psi_n$. По определению полагаем

$$\psi=F[\varphi]. \tag{58.67}$$

Если $\varphi_n^* \in L_2(-\infty, +\infty)$, $n=1, 2, \ldots$, — какая-либо другая последовательность непрерывных функций, сходящаяся в $L_2(-\infty, +\infty)$ к элементу φ, и если $\psi_n^*=F[\varphi_n^*]$, то из равенства

$$\|\varphi_n-\varphi_n^*\|=\|\psi_n-\psi_n^*\|$$

имеем $\lim\limits_{n\to\infty}\psi_n^*=\psi$. Таким образом, определение (58.67) не зависит от выбора последовательности непрерывных функций, сходящейся к элементу φ.

Для любого $\varphi \in L_2(-\infty, +\infty)$ справедливо равенство

$$\|F[\varphi]\|=\|\varphi\|,$$

что сразу следует из того, что это равенство имеет место для непрерывных функций $\varphi \in L_2(-\infty, +\infty)$ и непрерывности нормы.

Далее, легко проверить, что преобразование Фурье линейно на $L_2(-\infty, +\infty)$, т. е.

$$F[\lambda_1\varphi_1+\lambda_2\varphi_2]=\lambda_1 F[\varphi_1]+\lambda_2 F[\varphi_2]$$

для любых φ_1 и φ_2 из $L_2(-\infty, +\infty)$ и любых чисел λ_1 и λ_2. Это верно для ступенчатых функций. Они образуют плотное в $L_2(-\infty, +\infty)$ множество. Отсюда предельным переходом указанное равенство получается для любых элементов пространства $L_2(-\infty, +\infty)$.

Наконец, преобразование Фурье отображает пространство $L_2(-\infty, +\infty)$ *на себя*, т. е., каков бы ни был элемент $\psi \in L_2(-\infty, +\infty)$, существует такой элемент $\varphi \in L_2(-\infty, +\infty)$, что $F[\varphi]=\psi$. Для того чтобы это показать, следует тем же методом, как это было сделано для преобразования Фурье, определить на пространстве $L_2(-\infty, +\infty)$ обратное преобразование Фурье F^{-1} и показать, что для любого элемента $\psi \in L_2(-\infty, +\infty)$ справедливо равенство $\|F^{-1}[\psi]\|=\|\psi\|$. Затем можно показать, что $F[F^{-1}[\psi]]=\psi$

для всех $\psi \in L_2(-\infty, +\infty)$, исходя из того, что это верно на множестве ступенчатых функций, образующих плотное в $L_2(-\infty, +\infty)$ множество. Если теперь для элемента $\psi \in L_2(-\infty, +\infty)$ взять элемент $\varphi = F^{-1}[\psi]$, то получим $F[\varphi] = \psi$, что и означает, что преобразование F отображает все пространство $L_2(-\infty, +\infty)$ на себя.

Суммируя все сказанное, получим следующую теорему.

Теорема 18 (Планшерель). *Преобразование Фурье F линейно отображает пространство $L_2(-\infty, +\infty)$ на себя, при этом для любого элемента $\varphi \in L_2(-\infty, +\infty)$ справедливо равенство*

$$\| F[\varphi] \| = \| \varphi \|.$$

§ 59. ОБОБЩЕННЫЕ ФУНКЦИИ

59.1. Общие соображения

В этом параграфе мы рассмотрим одно обобщение классического понятия функции, а именно понятие обобщенной функции. Это понятие возникло при решении некоторых физических задач и в последние годы прочно и быстро вошло в математику. С помощью этого понятия можно распространить преобразование Фурье на существенно более широкий класс функций, чем абсолютно интегрируемые или интегрируемые в квадрате функции. Оно позволяет сформулировать на математическом языке такие идеализированные понятия, как, например, плотность точечного заряда, плотность материальной точки, мгновенный импульс и т. п.

Характерным для многих задач физики является то обстоятельство, что вводимые для описания того или иного объекта функции точки имеют смысл лишь постольку, поскольку непосредственный физический смысл имеют некоторые интегралы от них. Обобщенные функции и возникают как некоторое обобщение семейств интегралов от произведения двух функций, одна из которых фиксирована, а другая может выбираться произвольно из некоторой совокупности.

Рассмотрим пример плотности материальной точки. Пусть в точку $x_0 = 0$ числовой оси помещена масса, равная единице, а в других точках этой оси нет никаких масс.

Обозначим через $m(x, \varepsilon)$ массу, отрезка длины ε с центром в точке x, т. е. отрезка $\left[x - \frac{\varepsilon}{2}, x + \frac{\varepsilon}{2}\right]$; очевидно, что эта масса равна единице, если отрезок $\left[x - \frac{\varepsilon}{2}, x + \frac{\varepsilon}{2}\right]$ содержит точку 0, и нулю в противном случае:

$$m(x, \varepsilon) = \begin{cases} 1, & \text{если } |x| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}, \\ 0, & \text{если } |x| > \frac{\varepsilon}{2}. \end{cases}$$

Поэтому, определяя линейную плотность $\delta(x)$ распределения данных масс классическим образом, т. е. как предел отношения масс, расположенных на отрезке $\left[x-\frac{\varepsilon}{2}, x+\frac{\varepsilon}{2}\right]$, к длине ε этого отрезка, когда он стягивается к точке x, получим

$$\delta(x)=\lim_{\varepsilon\to+0}\frac{m(x, \varepsilon)}{\varepsilon}=\begin{cases}+\infty, & \text{если } x=0,\\ 0, & \text{если } x\neq 0.\end{cases} \tag{59.1}$$

С другой стороны, естественно потребовать, чтобы масса любого отрезка $[a, b]$ равнялась интегралу от плотности $\delta(x)$ по этому отрезку, т. е. чтобы

$$\int_a^b \delta(x)\,dx=\begin{cases}1, & \text{если } 0\in[a, b],\\ 0, & \text{если } 0\notin[a, b]\end{cases} \tag{59.2}$$

(мы написали интеграл формально). Очевидно, что с классической точки зрения равенства (59.1) и (59.2) несовместны; функцию $\delta(x)$ надо считать либо неинтегрируемой, либо с интегралом, равным нулю на любом отрезке (в смысле несобственного интеграла).

Вместе с тем в физике часто оказывается необходимо рассматривать «функции» вида $\delta(x)$. Сама «функция $\delta(x)$» встречается в физике и носит название *δ-функции*, или *функции Дирака*. Подойдем к ее свойствам (59.1) и (59.2) с другой стороны. Этот подход основывается на том, что физически всякая материальная частица имеет определенный размер и потому не является с геометрической точки зрения точкой. Поэтому естественно распределить массу точки 0 равномерно по отрезку длины ε с центром в точке 0; в результате получим среднюю плотность

$$\delta_\varepsilon(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{\varepsilon}, & \text{если } |x|\leqslant\dfrac{\varepsilon}{2},\\[2ex] 0, & \text{если } |x|>\dfrac{\varepsilon}{2}.\end{cases} \tag{59.3}$$

При $\varepsilon\to 0$ будем иметь

$$\lim_{\varepsilon\to+0}\delta_\varepsilon(x)=\begin{cases}+\infty, & \text{если } x=0,\\ 0, & \text{если } x\neq 0,\end{cases}$$

т. е.

$$\delta(x)=\lim_{\varepsilon\to 0}\delta_\varepsilon(x) \tag{59.4}$$

в смысле обычного определения предела функции, зависящей от параметра.

Для того чтобы подойти к другому определению δ-функции, изучим одно свойство семейства функций $\delta_\varepsilon(x)$. Оказывается, что для любой непрерывной на всей оси функции $\varphi(x)$

$$\lim_{\varepsilon\to+0}\int_{-\infty}^{+\infty}\delta_\varepsilon(x)\,\varphi(x)\,dx=\varphi(0). \tag{59.5}$$

Действительно,

$$\left|\int_{-\infty}^{+\infty}\delta_\varepsilon(x)\,\varphi(x)\,dx-\varphi(0)\right|=\left|\frac{1}{\varepsilon}\int_{-\frac{\varepsilon}{2}}^{\frac{\varepsilon}{2}}\varphi(x)\,dx-\varphi(0)\right|\leqslant$$

$$\leqslant\frac{1}{\varepsilon}\int_{-\frac{\varepsilon}{2}}^{\frac{\varepsilon}{2}}|\varphi(x)-\varphi(0)|\,dx.$$

И так как

$$\lim_{\varepsilon\to+0}\frac{1}{\varepsilon}\int_{-\frac{\varepsilon}{2}}^{+\frac{\varepsilon}{2}}|\varphi(x)-\varphi(0)|\,dx=0$$

(почему?), то формула (59.5) доказана.

В силу формулы (59.5) естественно формально написать

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(x)\,\varphi(x)\,dx=\varphi(0)$$

(формально в том смысле, что эта формула и является определением символа, стоящего слева, так как в обычном смысле мы не можем говорить здесь об интеграле).

При таком подходе мы не определили δ-функцию $\delta(x)$ как функцию точки, а определили свойство символа $\delta(x)$, называемого δ-функцией, которое состоит в следующем: δ-функция ставит в соответствие каждой функции φ, непрерывной на всей оси, число $\varphi(0)$. Таким образом, δ-функция есть функция, определенная на множестве непрерывных функций φ. Функции, определенные на множествах, элементами которых в свою очередь являются функции, называются функционалами. Итак, δ-функция есть функционал.

В следующих пунктах этого параграфа мы изложим некоторые вопросы общей теории обобщенных функций, построенной С. Л. Соболевым и Л. Шварцем*).

*) С. Л. Соболев (род. в 1908 г.) — советский математик. Л. Шварц (род. в 1915 г.) — французский математик.

59.2. Линейные пространства со сходимостью. Функционалы. Сопряженные пространства

Определение 1. *Линейное пространство R называется линейным пространством со сходимостью, если в нем определено понятие сходимости последовательности его элементов к элементу пространства, такое, что операции сложения элементов пространства и умножения их на число являются непрерывными.*

Это означает, что в множестве всех последовательностей элементов пространства R выделен класс последовательностей, названных сходящимися. Каждой сходящейся последовательности поставлен в соответствие единственный элемент пространства R, названный ее пределом. При этом для любых последовательностей $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ из R, сходящихся соответственно к пределам $x \in R$ и $y \in R$, и любых чисел λ и μ, последовательность $\{\lambda x_n + \mu y_n\}$ также сходится и

$$\lim_{n \to \infty} (\lambda x_n + \mu y_n) = \lambda x + \mu y.$$

Кроме того, если $\{\lambda_n\}$ — числовая последовательность и $\lim\limits_{n \to \infty} \lambda_n = \lambda$, то $\lim\limits_{n \to \infty} \lambda_n x = \lambda x$ для любого $x \in R$.

Примером линейных пространств со сходимостью являются нормированные линейные пространства; однако существуют линейные пространства со сходимостью, в которых нельзя ввести норму, порождающую заданную сходимость последовательностей.

Определение 2. *Функции, определенные на линейном пространстве R и принимающие числовые значения, называются функционалами этого пространства или функционалами над этим пространством. Значение функционала f на элементе x линейного пространства R обозначается (f, x), т. е. так же, как скалярное произведение элементов f и x в линейном пространстве R со скалярным произведением.*

Это обозначение оправдывается, в частности, тем, что скалярное произведение (y, x) при фиксированном элементе y является функционалом, определенным на указанном пространстве R.

Определение 3. *Пусть R — линейное пространство. Функционал f этого пространства называется линейным, если для любых элементов $x \in R$, $y \in R$ и любых чисел λ, μ выполняется условие*

$$(f, \lambda x + \mu y) = \lambda (f, x) + \mu (f, y).$$

Определение 4. *Функционал f, определенный на линейном пространстве R со сходимостью, называется непрерывным, если для любой сходящейся последовательности $x_n \in R$, $\lim x_n = x$, выполняется условие*

$$\lim_{n \to \infty} (f, x_n) = (f, x).$$

Функционалы, как и всякие числовые функции, можно складывать, умножать друг на друга, в частности на число. Например, если f и g — функционалы, то значение функционала $\alpha f + \beta g$ (α и β — числа) в точке $x \in R$ определяется по формуле

$$(\alpha f + \beta g,\ x) = \alpha (f,\ x) + \beta (g,\ x).$$

Лемма 1. *Линейные непрерывные функционалы образуют линейное пространство.*

Доказательство. Пусть f и g — линейные функционалы, α и β — числа. Покажем, что $\alpha f + \beta g$ — также линейный функционал:

$$(\alpha f + \beta g,\ \lambda x + \mu y) = \alpha (f,\ \lambda x + \mu y) + \beta (g,\ \lambda x + \mu y) =$$
$$= \alpha [\lambda (f,\ x) + \mu (f,\ y)] + \beta [\lambda (g,\ x) + \mu (g,\ y)] =$$
$$= \lambda [\alpha (f,\ x) + \beta (g,\ x)] + \mu [\alpha (f,\ y) + \beta (g,\ y)] =$$
$$= \lambda (\alpha f + \beta g,\ x) + \mu (\alpha f + \beta g,\ y).$$

Пусть, теперь f и g — непрерывные функционалы. Покажем, что тогда и $\alpha f + \beta g$ — также непрерывный функционал. Пусть $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = x$. Тогда

$$\lim_{n \to \infty} (\alpha f + \beta g,\ x_n) = \lim_{n \to \infty} [\alpha (f,\ x_n) + \beta (g,\ x_n)] =$$
$$= \alpha \lim_{n \to \infty} (f, x_n) + \beta \lim_{n \to \infty} (g,\ x_n) = \alpha (f,\ x) + \beta (g,\ x) = (\alpha f + \beta g,\ x).$$

Лемма доказана.

В линейном пространстве линейных непрерывных функционалов пространства R определяется понятие сходимости последовательностей следующим образом.

Определение 5. *Последовательность функционалов f_n, $n = 1, 2, \ldots$, называется сходящейся к функционалу f, если последовательность значений функционалов f_n сходится в каждой точке $x \in R$ к значению в ней функционала f, иначе говоря, если для любого элемента $x \in R$ числовая последовательность $\{(f_n, x)\}$ сходится к числу (f, x).*

Таким образом, утверждение $\lim\limits_{n \to \infty} f_n = f$ равносильно утверждению

$$\lim_{n \to \infty} (f_n,\ x) = (f,\ x) \quad \text{для всех } x \in R.$$

При таком определении сходимости функционалов операции их сложения и умножения на число непрерывны (это непосредственно следует из линейности функционалов и из свойств пределов числовых последовательностей), и, следовательно, справедливо следующее утверждение.

Лемма 2. *Линейные непрерывные функционалы образуют линейное пространство со сходимостью.*

Определение 6. *Линейное пространство со сходимостью функционалов пространства R называется сопряженным пространством к данному линейному пространству R со сходимостью.*

Пусть R и R^* — линейные пространства со сходимостью, пусть каждый элемент пространства R является и элементом пространства R^* и пусть всякая последовательность $x_n \in R$, $n = 1, 2, \ldots$, сходящаяся в R к элементу x, сходится к этому элементу и в R^*, в этом случае будем писать

$$R \subset R^*.$$

Определение 7. *Говорят, что линейный непрерывный функционал пространства $R \subset R^*$ продолжаем в линейный непрерывный функционал пространства R^*, если в пространстве R^* существует линейный непрерывный функционал F, такой, что $(F, x) = (f, x)$ для всех $x \in R$ (т. е. $F = f$ на R). В этом случае функционал F называется продолжением функционала f.*

Упражнение 1. Доказать, что если $R \subset R^*$ и R плотно в R^* (т. е. всякий элемент из R^* является пределом в R^* последовательности элементов из R), то всякий линейный непрерывный функционал пространства R, продолжаемый в линейный непрерывный функционал пространства R^*, продолжаем единственным образом.

59.3. Определение обобщенных функций. Пространства D и D'

Определим прежде всего основное для нас линейное пространство функций D. Будем рассматривать функции, аргументами которых являются вещественные числа, а значениями — вообще говоря, комплексные.

Определение 8. *Функция f, определенная на всей оси, называется финитной, если существует конечный отрезок, вне которого она равна нулю во всех точках.*

Определение 9. *Для всякой функции f замыкание множества точек x, для которых $f(x) \neq 0$, называется ее носителем и обозначается* $\operatorname{supp} f$.

Если функция финитна, то ее носитель является ограниченным множеством. Очевидно, что все финитные функции при естественных операциях их сложения и умножения на число образуют линейное пространство, а бесконечно дифференцируемые финитные функции — его подпространство. Введем в этом подпространстве понятие сходимости последовательностей.

Определение 10. *Последовательность бесконечно дифференцируемых финитных функций φ_n, $n = 1, 2, \ldots$, называется сходящейся к бесконечно дифференцируемой финитной функции φ, если:*

1) *существует отрезок* $[a, b]$, *вне которого все функции* φ_n, $n = 1, 2, \ldots$, *и* φ *обращаются в ноль**);

2) *на этом отрезке* $[a, b]$ *последовательность функций* φ_n $n = 1, 2, \ldots$, *и последовательности всех их производных* $\varphi_n^{(k)}$, $n = 1, 2, \ldots$, *равномерно сходятся соответственно к функции* φ *и к ее соответствующим производным* $\varphi^{(k)}$, $k = 1, 2, \ldots$.

Совокупность бесконечно дифференцируемых финитных функций с введенной операцией предельного перехода является линейным пространством со сходимостью. Это непосредственно следует из свойств пределов функций и свойств равномерно сходящихся последовательностей.

Определение 11. *Пространство бесконечно дифференцируемых финитных функций с введенной сходимостью называется основным пространством* D.

Очевидно, что если $\varphi \in D$, то и любая ее производная принадлежит пространству D.

Заметим еще, что если $\{\varphi_n\}$ сходится к φ в D, то и последовательность $\{\varphi_n^{(k)}\}$ производных любого порядка $k = 1, 2, \ldots$ сходится к $\varphi^{(k)}$ в D. Это непосредственно следует из определения сходимости в пространстве D.

Тривиальным примером функции пространства D является функция, равная нулю на всей оси, менее тривиальным — функция

$$\varphi(x) = \begin{cases} e^{-\frac{a^2}{a^2 - x^2}}, & \text{если } |x| < a, \\ 0, & \text{если } |x| \geqslant a. \end{cases} \qquad (59.6)$$

Упражнение 2. Доказать, что функция (59.6) бесконечно дифференцируема на всей оси (ср. с (37.25)).

Определение 12. *Всякий линейный непрерывный функционал* f, *определенный на* D, *называется обобщенной функцией.*

Определение 13. *Функция* f, *определенная на всей вещественной оси, называется локально интегрируемой, если она абсолютно интегрируема на любом конечном отрезке.*

Если f — локально интегрируемая функция, а $\varphi \in D$, то произведение $f\varphi$ абсолютно интегрируемо на всей оси. Действительно, пусть $\operatorname{supp} \varphi \subset [a, b]$; функция φ, очевидно, ограничена: $|\varphi(x)| \leqslant C$, $-\infty < x < +\infty$, поэтому

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)\varphi(x)|\,dx = \int_a^b |f(x)\varphi(x)|\,dx \leqslant C\int_a^b |f(x)|\,dx.$$

---

*) Отрезок $[a, b]$ содержит носители всех функций φ, φ_n, $n = 1, 2, \ldots$

Определим функционал (f, φ) на D равенством

$$(f, \varphi) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \varphi(x) \, dx. \tag{59.7}$$

Этот функционал линеен и непрерывен на D (почему?).

Таким образом, всякой локально интегрируемой функции $f(x)$ соответствует обобщенная функция (f, φ)*), в этом смысле всякую локально интегрируемую функцию можно рассматривать как обобщенную функцию.

Упражнение 3. Две непрерывные на вещественной оси функции различны тогда и только тогда, когда различны порожденные ими обобщенные функции.

Иногда обобщенные функции обозначаются символом $f(x)$. Это обозначение чисто символическое; оно отнюдь не обозначает значения обобщенной функции в точке x, а отражает лишь тот факт, что обобщенные функции являются в вышеуказанном смысле обобщением обычных (локально интегрируемых) функций; никакое значение обобщенной функции в точке x здесь не подразумевается.

Для обозначения значения обобщенной функции f на функции $\varphi = \varphi(x) \in D$ наряду с записью (f, φ) употребляется также запись

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \varphi(x) \, dx. \tag{59.8}$$

Таким образом, по определению

$$(f, \varphi) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \varphi(x) dx.$$

Это равенство является определением символа (59.8), который формально читается как «интеграл от произведения f на φ». Эта запись отражает собой тот факт, что обобщенные функции являются обобщением функционалов (59.7), где f — локально интегрируемая функция.

Упражнение 4. Доказать, что функционал $v. p. \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\varphi(x)}{x} dx$, $\varphi \in D$ является обобщенной функцией $\left(\text{мы будем ее обозначать } \mathscr{P}\frac{1}{x}\right)$.

*) Мы будем говорить также в этом случае, что обобщенная функция (f, φ) порождается функцией f.

В качестве другого примера обобщенной функции рассмотрим функционал, обозначаемый $\delta = \delta(x)$, который определяется формулой

$$(\delta, \varphi) = \varphi(0), \quad \varphi \in D.$$

Этот функционал, как мы уже знаем (см. п. 59.1), называется δ-функцией. Его линейность и непрерывность легко проверяются. Он не может быть представлен в виде (59.7) ни при какой локально интегрируемой функции f. Действительно, если бы нашлась такая локально интегрируемая функция f, что

$$(\delta, \varphi) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\varphi(x)\,dx, \quad \varphi \in D,$$

то для этой функции f и для функции φ заданной формулой (59.6) мы имели бы

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\varphi(x)\,dx = \varphi(0) = \frac{1}{e}. \tag{59.9}$$

Но в силу абсолютной интегрируемости функции f на любом конечном отрезке

$$\lim_{a\to 0} \int_{-a}^{a} |f(x)|\,dx = 0$$

(почему?).

Далее, замечая, что $e^{-\frac{a^2}{x^2-a^2}} < \frac{1}{e}$, $-a \leqslant x \leqslant a$, получим

$$\left|\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\varphi(x)\,dx\right| = \left|\int_{-a}^{a} f(x)e^{-\frac{a^2}{x^2-a^2}}dx\right| \leqslant \frac{1}{e}\int_{-a}^{a} |f(x)|\,dx,$$

поэтому левая часть равенства (59.9) при $a \to 0$ стремится к нулю, а правая нет. Полученное противоречие и доказывает наше утверждение. Таким образом, запас обобщенных функций в указанном смысле больше, чем обычных.

Определение 14. *Функционал, ставящий в соответствие каждой функции $\varphi \in D$ число $\varphi(x_0)$, где x_0 фиксировано, называется δ-функцией и обозначается $\delta(x-x_0)$. Применяя запись* (59.8), *можно написать*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x-x_0)\varphi(x)\,dx = \varphi(x_0), \quad \varphi \in D.$$

Определение 15. *Обобщенные функции, представимые в виде* (59.7), *где f — локально интегрируемая функция, называются регулярными обобщенными функциями, а все остальные — сингулярными.*

Постоянная обобщенная функция f, т. е. такая, что $(f, \varphi)= c\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\varphi(x)dx$, c — постоянная, $\varphi\in D$ (в частности, нулевая функция), является, очѐвидно, регулярной обобщенной функцией, а δ-функция является примером сингулярной обобщенной функции.

Определение 16. *Совокупность обобщенных функций, как и всякая совокупность функционалов линейного пространства со сходимостью* (см. п. 59.2), *образует линейное пространство со сходимостью, сопряженное к пространству D, называемое пространством обобщенных функций и обозначаемое D'.*

Таким образом, сходимость последовательности обобщенных функций f_n, $n = 1, 2, \ldots$, к обобщенной функции f означает, что

$$\lim_{n\to\infty}(f_n, \varphi)=(f, \varphi)$$

для любой функции $\varphi\in D$.

Задача 29. Пусть $f_n \in D'$ и пусть для любой функции $\varphi \in D$ существует предел $\lim\limits_{n\to\infty}(f_n, \varphi) = F(\varphi)$. Тогда $F(\varphi)$—обобщенная функция.

В п. 59.1 мы рассматривали функции $\delta_\varepsilon(x)$, которые, очевидно, локально интегрируемы. Мы видели, что эти функции обладают тем свойством, что для любой непрерывной на всей оси функции φ и, следовательно, для любой функции $\varphi\in D$:

$$\lim_{\varepsilon\to+0}(\delta_\varepsilon, \varphi)=\lim_{\varepsilon\to+0}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\delta_\varepsilon(x)\varphi(x)\,dx=\varphi(0)=(\delta, \varphi).$$

С точки зрения обобщенных функций это означает, что в D'

$$\lim_{\varepsilon\to+0}\delta_\varepsilon=\delta^{*)}.$$

Таким образом, δ-функция в пространстве D' является пределом регулярных обобщенных функций.

Упражнения. 5. Пусть $f_t(x)=\frac{1}{\sqrt{\pi t}}e^{-\frac{x^2}{\pi t}}$, тогда в D' имеем

$$\lim_{t\to+0}f_t(x)=\delta(x).$$

---

*) Как и для обычных функций, символ $\varepsilon\to+0$ означает, что указанный предел имеет место для любой последовательности $\varepsilon_n > 0$, $n = 1, 2, \ldots$, стремящейся к нулю.

6. Доказать, что в D'

$$\frac{1}{x \pm i0} = \lim_{y \to +0} \frac{1}{x \pm iy} = \mp i\pi\delta(x) + \mathscr{P}\frac{1}{x}$$

(эти формулы называются *формулами Сохоцкого**)).

Задача 30. Доказать, что всякая сингулярная обобщенная функция является пределом регулярных. В этом смысле пространство обобщенных функций является «пополнением» пространства обычных функций.

Как мы видели, понятие обобщенной функции не сводится к понятию функции точки и поэтому говорить о значении обобщенной функции в данной точке, в частности об обращении ее в ноль в этой точке, вообще говоря, не имеет смысла. Однако можно ввести естественное понятие обращения в ноль обобщенной функции на интервале.

Определение 17. *Будем говорить, что обобщенная функция f обращается в ноль на интервале (a, b), если $(f, \varphi) = 0$ для всех $\varphi \in D$, которые имеют носитель, содержащийся в интервале (a, b).*

Упражнение 7. Для того чтобы непрерывная функция обращалась в ноль в каждой точке интервала (a, b), необходимо и достаточно, чтобы она обращалась в ноль на интервале (a, b) как обобщенная функция.

Определение 18. *Обобщенные функции f и g называются равными на интервале (a, b), если $f - g = 0$ на (a, b).*

59.4. Дифференцирование обобщенных функций

Определим теперь производную обобщенной функции. Посмотрим прежде всего, что представляет собой производная обычной непрерывно дифференцируемой функции f, рассматриваемой как функционал (f, φ) на D. Интегрируя по частям, в силу финитности функции $\varphi \in D$ получим

$$(f', \varphi) = \int_{-\infty}^{+\infty} f'(x)\varphi(x)\,dx = -\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\varphi'(x)\,dx = -(f, \varphi'), \quad (59.10)$$

причем, как известно, $\varphi' \in D$. Таким образом, производная f' является функционалом на D, значения которого выражаются через значения функции f, рассматриваемой как функционал, с помощью формулы (59.10). Это делает естественным следующее определение.

Определение 19. *Производной обобщенной функции f называется функционал на D, обозначаемый f', такой, что*

$$(f', \varphi) = -(f, \varphi') \quad \varphi \in D. \quad (59.11)$$

Из формулы (59.10) следует, что производная в обычном смысле непрерывно дифференцируемой функции, рассматриваемая как

*) Ю. В. Сохоцкий (1842—1929) — русский математик.

функционал на D, совпадает с ее производной в смысле обобщенных функций.

Лемма 3. *Функционал f' является линейным непрерывным функционалом и, следовательно, обобщенной функцией.*

Доказательство. Проверим линейность:

$$(f', \lambda\varphi+\mu\psi) = -(f, (\lambda\varphi+\mu\psi)') = -(f, \lambda\varphi'+\mu\psi') =$$
$$= -\lambda(f, \varphi')-\mu(f, \psi') = \lambda(f', \varphi)+\mu(f', \psi), \ \varphi \in D, \ \psi \in D.$$

Для того чтобы проверить непрерывность функционала f', вспомним, что если $\varphi \in D$, $\varphi_k \in D$, $k=1, 2, \ldots$, и $\lim\limits_{k\to\infty}\varphi_k = \varphi$ в D, то в силу определения сходимости в пространстве D и $\lim\limits_{k\to\infty}\varphi'_k = \varphi'$ в D; поэтому, если $\varphi_k \to \varphi$ в D, то $\lim\limits_{k\to\infty}(f', \varphi_k) = -\lim\limits_{k\to\infty}(f, \varphi'_k) = -(f, \varphi') = (f', \varphi)$.

Таким образом, если $f \in D'$, то f' всегда существует и $f' \in D'$. Лемма доказана.

Производные высших порядков для обобщенных функций определяются последовательно, как и для обычных функций:

$$f'' = (f')', \ f''' = (f'')',$$

вообще

$$f^{(k)} = (f^{(k-1)})', \quad k=1, 2, \ldots, f^{(0)} = f.$$

По индукции легко проверяется, что

$$(f^{(k)}, \varphi) = (-1)^k (f, \varphi), \ \varphi \in D, \ k=0, 1, \ldots .$$

Согласно сделанному определению, обобщенные функции имеют производные любых порядков.

Примеры.

1. Пусть

$$\theta(x) = \begin{cases} 1, \text{ если } x \geqslant 0, \\ 0, \text{ если } x < 0. \end{cases}$$

Функция $\theta(x)$ называется *функцией Хевисайда**). Она является локально интегрируемой функцией и потому может рассматриваться как обобщенная функция. Найдем ее производные. Согласно определению (59.11),

*) О. Хевисайд (1850—1925) — английский физик.

$$(\theta', \varphi) = -(\theta, \varphi') = -\int_{-\infty}^{+\infty} \theta\varphi' dx = -\int_{0}^{+\infty} \varphi' dx = \varphi(0) = (\delta, \varphi), \ \varphi \in D,$$

т. е. $\theta' = \delta$.

2. В качестве другого примера вычислим производные δ-функции

$$(\delta^{(k)}, \varphi) = (-1)^{(k)} (\delta, \varphi^{(k)}) = (-1)^k \varphi^{(k)}(0).$$

Упражнения. 8. Пусть

$$f(x) = \begin{cases} f_1(x), & x < x_0, \\ f_2(x), & x > x_0, \end{cases}$$

где функции $f_1(x)$ и $f_2(x)$ непрерывно дифференцируемы и существуют пределы $f(x_0 \pm 0)$. Найти f' в D'.

9. Пусть $f(x)$ непрерывно дифференцируемая на всей оси. Найти $(\theta f)'$ в D'.

10. Доказать, что в D' $\mathscr{P}\dfrac{1}{x} = (\ln|x|)'$ (см. упражнение 4).

Лемма 4. *Пусть $f_n \in D'$, $f \in D'$ и*

$$\lim_{n\to\infty} f_n = f, \tag{59.12}$$

тогда и

$$\lim_{n\to\infty} f_n' = f', \tag{59.13}$$

т. е. для обобщенных функций всегда производная от предела равна пределу производных.

Доказательство. Для любой функции $\varphi \in D$:

$$(f', \varphi) - (f_n', \varphi) = -[(f, \varphi') - (f_n, \varphi')] \to 0 \quad \text{при } n\to\infty.$$

Лемма доказана.

Можно рассматривать и ряды обобщенных функций. Выражение

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n, \tag{59.14}$$

где $u_n \in D'$, $n = 1, 2, \ldots$, называется *рядом обобщенных функций*, а

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} u_k$$

— его *частичной суммой n-го порядка* ($n = 1, 2, \ldots$). Ряд (59.14) называется *сходящимся*, если в D' существует предел

$$\lim_{n\to\infty} s_n = s.$$

Элемент s называется *суммой ряда* (59.14), при этом пишется

$$s = \sum_{n=1}^{\infty} u_n.$$

Лемма 5. *Сходящийся ряд обобщенных функций можно почленно дифференцировать любое число раз:*

$$s^{(k)} = \sum_{n=1}^{\infty} u_n^{(k)}, \ k = 1, 2, \ldots .$$

Это следует из леммы 4.

59.5. Пространство основных функций S и пространство обобщенных функций S'

Обозначим через S множество всех бесконечно дифференцируемых комплекснозначных функций, которые вместе со всеми своими производными стремятся к нулю при $x \to \infty$ быстрее любой степени $\frac{1}{|x|}$. Иначе говоря, множество S состоит из тех и только тех бесконечно дифференцируемых функций φ, для которых при любых целых неотрицательных n и m выполняется условие

$$\lim_{x \to \infty} x^n \varphi^{(m)}(x) = 0. \tag{59.15}$$

Очевидно, что если функция $\varphi \in S$, то и любая ее производная принадлежит множеству S. Условие принадлежности функции φ к множеству S можно сформулировать и несколько иначе: бесконечно дифференцируемая функция φ принадлежит S тогда и только тогда, когда для любых целых неотрицательных n и m имеем

$$\sup_{-\infty < x < +\infty} |x^n \varphi^{(m)}(x)| = c_{n,m} < \infty. \tag{59.16}$$

Действительно, если это так, то, заменяя в (59.16) n на $n+1$, получим

$$|x^n \varphi^{(m)}(x)| \leqslant \frac{c_{n+1,m}}{|x|},$$

откуда и следует (59.15). Обратно, из (59.15) и из ограниченности $x^n \varphi^{(m)}(x)$ на любом отрезке следует (59.16). Ясно, что множество S образует линейное пространство.

Определение 20. *Последовательность функций* $\varphi_k(x) \in S$, $k = 1, 2, \ldots$, *называется сходящейся в* S *к функции* $\varphi(x) \in S$, *если*

для всех натуральных n и m каждая последовательность $x^n\varphi_k^{(m)}(x)$, $k=1, 2, \ldots$, равномерно на всей оси сходится к функции $x^n\varphi^{(m)}(x)$.

Очевидно, что $\lim\limits_{k\to\infty}\varphi_k=\varphi$ в S тогда и только тогда, когда при любых натуральных n и m

$$\lim_{k\to\infty}\sup_{-\infty<x<+\infty}\left|x^n\left[\varphi_k^{(m)}(x)-\varphi^{(m)}(x)\right]\right|=0. \qquad (59.17)$$

Отметим, что если $\varphi_n\to\varphi$ в S, то и для производных любого порядка $\varphi_n^{(k)}\to\varphi^{(k)}$ в S, $k=1, 2, \ldots$.

Линейное пространство S с введенной операцией предельного перехода является линейным пространством со сходимостью.

Очевидно, что $D\subset S$, в частности, последовательность функций $\varphi_k\in D$, $k=1, 2, \ldots$, сходящаяся в D к функции φ, сходится к функции φ и в S. Вместе с тем $D\neq S$, ибо $e^{-x^2}\in S$, но $e^{-x^2}\notin D$.

Задача 31. Доказать, что D плотно в S, т. е. что любая функция $\varphi\in S$ является пределом в S некоторой последовательности $\varphi_k\in D$, $k=1,2,\ldots$.

Определение 21. *Линейный непрерывный функционал над пространством S называется обобщенной функцией медленного роста. Пространство всех таких функционалов называется пространством обобщенных функций медленного роста и обозначается S'.*

Каждый функционал $f\in S'$, рассматриваемый только на множестве D, является обобщенной функцией, следовательно, элемент множества S' можно интерпретировать как продолжение некоторого линейного непрерывного функционала с множества D на S (см. п. 59.2).

Можно показать, что не всякая обобщенная функция из D' продолжаема на S, в этом смысле можно сказать, что S' составляет строгую часть D'.

Упражнение 11. Доказать, что обобщенная функция, порожденная локально интегрируемой функцией e^x, не продолжаема в элемент пространства S'.

Всякая локально интегрируемая функция $f(x)$, для которой в некоторой окрестности ∞ справедлива оценка

$$|f(x)|\leqslant A|x|^k \qquad (59.18)$$

(A и k — неотрицательные постоянные)*), в частности, любой многочлен порождает функционал пространства D, продолжаемый в ли-

*) Такие функции называются функциями медленного роста, откуда и термин «обобщенные функции медленного роста».

нейный непрерывный функционал над S. Этот функционал определяется формулой

$$(f, \varphi) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\varphi(x)\,dx, \quad \varphi \in S. \tag{59.19}$$

Действительно, из условий (59.15) и (59.18) следует, что $f(x)\varphi(x) \to 0$ при $x \to \infty$ быстрее любой степени $\frac{1}{|x|}$, и, следовательно, интеграл (59.19) существует.

Упражнения. 12. Доказать, что функционал (59.19) линеен и непрерывен на S.

13. Доказать, что обобщенная функция $\frac{1}{x+i0} \in D'$ (см. упражнение 6) продолжаема в элемент S'.

Множество S' образует линейное пространство со сходимостью, сопряженное с S (см. п. 59.2).

Поскольку у любой функции $\varphi \in S$ и $\varphi' \in S$, то для обобщенных функций из S', как и для обобщенных функций из D', можно определить производную f' по формуле

$$(f', \varphi) = -(f, \varphi'), \quad \varphi \in S.$$

Таким образом, для любой обобщенной функции $f \in S'$ производная f' всегда существует и $f' \in S'$. При этом на элементе $\varphi \in D$ производные обобщенной функции f, рассматриваемые соответственно как производные в пространствах D' и S', совпадают. Как и в случае пространства D', для пространства S' производная от предела равна пределу производных.

59.6. Преобразование Фурье в пространстве S

Функции $\varphi \in S$ абсолютно интегрируемы. Из (59.16) следует, например, что $|\varphi(x)| \leqslant \frac{c_{0,0}+c_{2,0}}{1+x^2}$, поэтому для них существует классическое преобразование Фурье:

$$\hat{\varphi} = F[\varphi] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x) e^{-ixy}\,dx, \quad \varphi \in S, \tag{59.20}$$

а также обратное преобразование Фурье:

$$[\varphi F^{-1}] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(y) e^{ixy}\,dy, \quad \varphi \in S. \tag{59.21}$$

При этом на S имеют место формулы взаимности для прямого и обратного преобразования Фурье (см. п. 56.2):

$$F\left[F^{-1}[\varphi]\right]=\varphi, \quad F^{-1}\left[F[\varphi]\right]=\varphi, \quad \varphi\in S. \tag{59.22}$$

Например, вторая из этих формул в интегральной форме принимает вид

$$F^{-1}\left[\widehat{\varphi}\right]=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\widehat{\varphi}(y)\,e^{ixy}\,dy=\varphi(x).$$

Теорема 1. *Преобразование Фурье и обратное преобразование Фурье отображает взаимно однозначно и непрерывно S на S'.*

Доказательство. Покажем, что если $\varphi\in S$, то и $\widehat{\varphi}\in S$. Из определения множества S и результатов п. 56.6 следует, что функция $\widehat{\varphi}$ имеет производные всех порядков. Применяя результаты п. 56.4 и 56.6, при любых неотрицательных целых n и m получим

$$\left|y^{(n)}\,\widehat{\varphi}^{(m)}(y)\right|=\left|y^{n}F^{(m)}[\varphi]\right|=\left|y^{n}F\left[x^{m}\varphi\right]\right|=$$

$$=\left|F\left[(x^{m}\varphi)^{(n)}\right]\right|=\left|\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\left(x^{m}\varphi(x)\right)^{(n)}e^{-ixy}\,dx\right|\leqslant$$

$$\leqslant\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\left|\left(x^{m}\varphi(x)\right)^{(n)}\right|dx.$$

Деля и умножая подынтегральное выражение на $1+x^2$, получим

$$\left|y^{n}\,\widehat{\varphi}^{(m)}(y)\right|\leqslant\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\sup_x\,(1+x^2)\left|\left(x^{m}\varphi(x)\right)^{(n)}\right|\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{1+x^2}=$$

$$=\sqrt{\frac{\pi}{2}}\sup_x(1+x^2)\left|\left(x^{m}\varphi(x)\right)^{(n)}\right|. \tag{59.23}$$

Конечность выражения, стоящего в правой части, следует из выполнения условий (59.16) для функции φ. Поэтому

$$\sup_y\left|y^{n}\,\widehat{\varphi}^{(m)}(y)\right|<+\infty,$$

т. е. $\widehat{\varphi}\in S$.

Итак, преобразование Фурье отображает S в S, при этом это отображение взаимно однозначно (см. п. 56.2).

Аналогично доказывается и то, что обратное отображение Фурье F^{-1} отображает S в S и притом взаимно однозначно. Легко убедиться, что на самом деле эти отображения происходят на пространст-

во S. Это сразу следует из формул взаимности (59.22) для прямого и обратного преобразований Фурье*).

Действительно, покажем, что $F(S)$ совпадает со всем пространством S. Пусть $\psi \in S$, положим $\varphi = F^{-1}[\psi]$. Тогда

$$F[\varphi] = F\left[F^{-1}[\psi]\right] = \psi.$$

Подобным же образом доказывается и то, что

$$F^{-1}(S) = S.$$

Докажем, теперь непрерывность отображения F.

Сначала докажем его непрерывность в нуле. Пусть $\lim\limits_{k\to\infty} \varphi_k = 0$ в S, тогда из (59.23) следует, что

$$\left| y^n \hat{\varphi}_k^{(m)}(y) \right| \leqslant \sqrt{\frac{\pi}{2}} \sup_x (1+x^2) \left| (x^m \varphi_k(x))^{(n)} \right|, \quad k = 1, 2, \ldots .$$

Но из (59.17 (при $\varphi(x) = 0$) имеем

$$\lim_{k\to\infty} \sup_x (1+x^2) \left| (x^m \varphi_k(x))^{(m)} \right| = 0.$$

Поэтому

$$\lim_{k\to\infty} \sup_y \left| y^n \hat{\varphi}_x^{(m)}(\varphi) \right| = 0,$$

т. е.

$$\lim_{k\to\infty} \hat{\varphi}_k = 0 \text{ в } S.$$

Если теперь $\lim\limits_{k\to\infty} \varphi_k = \varphi$ в S, то $\lim\limits_{k\to\infty} (\varphi_k - \varphi) = 0$, следовательно, в силу доказанного $\lim\limits_{k\to\infty} (\hat{\varphi}_k - \hat{\varphi}) = \lim\limits_{k\to\infty} \widehat{(\varphi_n - \varphi)} = 0$, откуда $\lim\limits_{k\to\infty} \hat{\varphi}_k = \hat{\varphi}$.

Таким образом, преобразование Фурье F непрерывно отображает S на S.

Совершенно аналогично доказывается непрерывность обратного преобразования Фурье F^{-1}.

Теорема доказана.

---

*) Заметим, что из того, что $F(S) = F^{-1}(S) = S$, следует, что в формулах (59.22) все интегралы существуют в обычном смысле, а не только в смысле главного значения (ср. с п. 56.2).

59.7. Преобразование Фурье обобщенных функций

Предварительно докажем следующее интегральное равенство.

Пусть функция f непрерывна и абсолютно интегрируема на всей оси и пусть $\varphi \in S$, тогда

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)\,dx \int_{-\infty}^{+\infty} f(y)\,e^{-ixy}\,dy = \int_{-\infty}^{+\infty} f(y)\,dy \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)\,e^{-ixy}\,dy. \quad (59.24)$$

Это следует из теоремы 5 п. 54.2. Действительно, повторный интеграл, стоящий слева, существует, ибо существует интеграл

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left|\varphi(x) \int_{-\infty}^{+\infty} f(y)\,e^{-ixy}\,dy\right| dx \leqslant$$
$$\leqslant \int_{-\infty}^{+\infty} |\varphi(x)|\,dx \int_{-\infty}^{+\infty} |f(y)|\,dy.$$

Если $[a, b]$ — произвольный отрезок, то функция f в силу непрерывности ограничена на $[a, b]$: $|f(x)| \leqslant M$, поэтому

$$|f(x)\,\varphi(x)\,e^{-ixy}| \leqslant M\,|\varphi(x)|, \quad a \leqslant x \leqslant b.$$

Отсюда в силу сходимости интеграла $\int_{-\infty}^{+\infty} |\varphi(x)|\,dx$ следует равномерная сходимость интеграла

$$f(y) \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)\,e^{-ixy}\,dx$$

на отрезке $[a, b]$.

Далее, $|\varphi(x)| \leqslant c_{0,0}$, $-\infty < x < +\infty$ (см. (59.16)), поэтому $|\varphi(x) f(y)\,e^{-ixy}| \leqslant c_{0,0}\,|f(y)|$, и так как интеграл $\int_{-\infty}^{+\infty} |f(y)|\,dy$ сходится, то интеграл

$$\varphi(x) \int_{-\infty}^{+\infty} f(y)\,e^{-ixy}\,dy$$

равномерно сходится на всей оси.

Наконец, интеграл

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx \int_{-\infty}^{+\infty} |\varphi(x) f(y)\,e^{-ixy}|\,dy =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} |\varphi(x)|\,dx \int_{-\infty}^{+\infty} |f(y)|\,dy$$

конечен, поэтому в рассматриваемом случае выполнены все условия теоремы 5 п. 54.2 и, следовательно, можно переставить порядок интегрирования. Равенство (59.24) доказано.

Если функция f удовлетворяет условию (59.18) и, следовательно, порождает некоторый функционал f на S, то, умножив равенство (59.24) на $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$, получим

$$(F[f], \varphi) = (f, F[\varphi]), \quad \varphi \in S. \tag{59.25}$$

Эту формулу и примем за определение преобразования Фурье, обобщенных функцией из пространства S'.

Определение 22. *Преобразованием Фурье обобщенной функции $f \in S'$ называется функционал $F[f]$, определяемый формулой* (59.25).

Итак, для любой обобщенной функции f из S' определено ее преобразование Фурье $F[f]$.

Отметим, что для функции $\varphi \in D$ ее преобразование Фурье $F[\varphi]$, вообще говоря, не принадлежит пространству D, поскольку $F[\varphi]$ не всегда является финитной функцией. Поэтому формула (59.25) имеет смысл не для всех $\varphi \in D$. Из-за этого обстоятельства при рассмотрении преобразования Фурье обобщенных функций нам и пришлось сузить класс обобщенных функций, введенных раньше, ограничившись только обобщенными функциями медленного роста.

Преобразование Фурье $F[f]$ обобщенной функции f мы будем обозначать также символом $\widehat{f}$ или

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-ixy}\,dx.$$

Таким образом, равенство

$$F[f] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-ixy}\,dx \tag{59.26}$$

в случае, когда f является обобщенной функцией, является определением символа, стоящего в правой части равенства.

Определив преобразование Фурье для всех обобщенных функций из S', мы, в частности, определили и преобразование Фурье для обычных функций f, удовлетворяющих условию (59.18), т. е. для функций существенно более широкого класса, чем это было сделано раньше (см. п. 56.2 и 58.6). Это является одним из весьма существенных обстоятельств, оправдывающих целесообразность введения понятия обобщенных функций.

Покажем, что преобразование Фурье обобщенных функций обладает рядом свойств, аналогичных свойствам классического преобразования Фурье, т. е. преобразования Фурье абсолютно интегрируемых функций.

Лемма 6. *Преобразование Фурье $F[f]$, $f \in S'$, также является обобщенной функцией класса S', т. е. $F[f]$ — линейный и непрерывный функционал над пространством S.*

Доказательство. Проверим линейность преобразования Фурье. Пусть $f \in S'$, $g \in S'$, λ и μ — числа, тогда для любого $\varphi \in S$ имеем

$$(F[\lambda f+\mu g], \ \varphi)=(\lambda f+\mu g, \ F[\varphi]) =$$
$$=\lambda(f, \ F[\varphi])+\mu(g, F[\varphi])=\lambda(F[f], \ \varphi)+\mu(F[g], \varphi)=$$
$$=(\lambda F[f]+\mu F[g], \ \varphi).$$

Таким образом,

$$F[\lambda f+\mu g]=\lambda F[f]+\mu F[g].$$

Проверим непрерывность преобразования Фурье. Пусть $f \in S'$

$$\varphi \in S, \quad \varphi_n \in S, \quad n=1, 2, \ldots, \lim_{n\to\infty} \varphi_n=\varphi$$

и, следовательно (см. теорему 1 п. 59.6),

$$\lim_{n\to\infty} F[\varphi_n]=F[\varphi].$$

Тогда в силу непрерывности f на S получим

$$\lim_{n\to\infty} (F[f], \ \varphi_n)= \lim_{n\to\infty} (f, F[\varphi_n])=(f, \ F[\varphi])=(F[f], \ \varphi).$$

Итак, мы показали, что если $f \in S'$, то и $F[f] \in S'$.

Лемма доказана.

Естественно определяется и обратное преобразование Фурье $F^{-1}[f]$ элемента $f \in S'$ как функционал пространства S', задаваемый формулой

$$(F^{-1}[f], \varphi)=(f, F^{-1}[\varphi]), \ \varphi \in S.$$

Если f абсолютно интегрируемая непрерывная функция, это равенство выполняется для нее в обычном смысле. Это проверяется так же, как и в случае формулы (59.24).

По определению полагается также (ср. (59.26))

$$F^{-1}[f]=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,e^{ixy}\,dx. \qquad (59.27)$$

Как и в случае прямого преобразования Фурье F показывается, что если $f \in S'$, то и $F^{-1}[f] \in S'$.

Теорема 2. *Преобразование Фурье F и обратное преобразование Фурье F^{-1} отображают взаимно однозначно и непрерывно S' на S', при этом для любого элемента $f \in S'$ имеет место равенство*

$$F^{-1}\left[F[f]\right] = F\left[F^{-1}[f]\right] = f. \tag{59.28}$$

Доказательство. Докажем сначала формулы (59.28). Для любого элемента $\varphi \in S$ имеем

$$\left(F^{-1}\left[F[f]\right], \varphi\right) = \left(F[f], F^{-1}[\varphi]\right) = \left(f, F\left[F^{-1}[\varphi]\right]\right) = (f, \varphi).$$

Аналогично

$$\left(F\left[F^{-1}[f]\right], \varphi\right) = \left(F^{-1}[f], F[\varphi]\right) = \left(f, F^{-1}[F[\varphi]]\right) = (f, \varphi).$$

Формулы (59.28) доказаны.

Покажем теперь, что преобразование Фурье F отображает пространство S' на все пространство S': $F(S') = S'$. Пусть $g \in S'$, тогда если $f = F^{-1}[g]$, то $F[f] = F[F^{-1}[g]] = g$, т. е. в любой элемент из S' при преобразовании Фурье F отображается некоторый элемент из S'.

Покажем, что F взаимно однозначно. Если $f_1 \in S'$, $f_2 \in S'$ и $F[f_1] = F[f_2]$, то и $F^{-1}[F[f_1]] = F^{-1}[F[f_2]]$, откуда в силу (59.28) имеем $f_1 = f_2$.

Наконец, F является непрерывным отображением. Действительно, пусть $f \in S', f_n \in S'$, $n = 1, 2, \ldots$, $\lim\limits_{n\to\infty} f_n = f$ и, следовательно, для любого $\varphi \in S$, $\lim\limits_{n\to\infty}(f_n, \varphi) = (f, \varphi)$. Тогда

$$\lim_{n\to\infty}(F[f_n], \varphi) = \lim_{n\to\infty}(f_n, F[\varphi]) = (f, F[\varphi]) = (F[f], \varphi).$$

Аналогично доказывается, что и F^{-1} непрерывно взаимно однозначно отображает S' на S'.

Теорема доказана.

Примеры. Найдем $F[\delta] = \widehat{\delta}$. Имеем

$$(\widehat{\delta}, \varphi) = (\delta, \widehat{\varphi}) = \widehat{\varphi}(0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)\,dx = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \varphi\right), \quad \varphi \in S,$$

поэтому $F[\delta] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$ и, следовательно, $F^{-1}[1] = \sqrt{2\pi}\,\delta$ (заметим, что обычное классическое преобразование Фурье $F^{-1}[1]$, также как и прямое $F[1]$, не существуют). С помощью интегралов (59.26) и (59.27) эти формулы можно переписать в виде

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x) e^{-ixy}\,dx = 1, \quad \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{ixy}\,dx = \delta(x).$$

Подобным же образом находится и обратное преобразование Фурье δ функции:

$$F^{-1}[\delta] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} = F[\delta].$$

Отсюда

$$F[1] = F^{-1}[1] = \sqrt{2\pi}\,\delta.$$

Используя способ записи (59.26) и (59.27), эти формулы можно переписать в виде

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ixy}\,dx = \delta(x), \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x)\,e^{ixy}\,dx = 1.$$

Вычислим, далее, преобразование Фурье от производной и производную от преобразования Фурье. Предварительно нам придется ввести понятие произведения обобщенной функции $f \in S'$ на обычную бесконечную дифференцируемую функцию $\alpha(x)$, такую, что для любой ее производной $\alpha^{(n)}(x)$ существуют постоянные $\beta_n > 0$ и $l_n > 0$, $n = 0, 1, \ldots$, такие, что для всех x справедливо неравенство

$$|\alpha^{(n)}(x)| \leqslant \beta_n (1 + |x|)^{l_n}, \quad n = 0, 1, 2, \ldots^{*)}. \tag{59.29}$$

Заметим, что все многочлены удовлетворяют этому условию.

Если функция α типа (59.29) и $\varphi \in S$, то и $\alpha\varphi \in S$. Если функция f локально суммируема и удовлетворяет условию (59.18) и α удовлетворяет условию (59.29), то функция αf также удовлетворяет условию (59.18) и

$$(f, \alpha\varphi) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\alpha(x)\,\varphi(x)\,dx = (\alpha f, \varphi).$$

Определим теперь произведение αf, где α удовлетворяет условию (59.29), а $f \in S'$, формулой

$$(\alpha f, \varphi) = (f, \alpha\varphi), \quad \varphi \in S.$$

Легко проверить, что $\alpha f \in S'$**), т. е. что αf является линейным функционалом над пространством S.

Упражнение 14. Проверить, что $\alpha f \in S'$.

---

*) В силу этого условия (при $n = 0$) функцию $\alpha(x)$ можно рассматривать как обобщенную функцию пространства S' [см. (59.18)].

**) Затруднения при определении произведения обобщенных функций связаны с тем, что произведение линейных функционалов в обычном смысле как произведение функций (т. е. произведение значений в каждой точке) не является линейным функционалом.

Докажем в заключение формулы

$$F[f^{(n)}]=(ix)^n F[f], \tag{59.30}$$

$$i^n F^{(n)}[f]=F[x^n f], \quad f\in S'. \tag{59.31}$$

Имеем (см. п. 58.6)

$$(F[f^{(n)}],\varphi)=(f^{(n)},\ F[\varphi])=(-1)^n(f,F^{(n)}[\varphi])=$$
$$=(-1)^n\left(f,\ \frac{1}{i^n}F[x^n\varphi]\right)=i^n(F[f],\ x^n\varphi)=$$
$$=((ix)^n F[f],\ \varphi),\quad \varphi\in S.$$

Формула (59.30) доказана.

Докажем (59.31) (см. п. 58.4):

$$(F^{(n)}[f],\varphi)=(-1)^n(F[f],\varphi^{(n)})=(-1)^n(f,F[\varphi^{(n)}])=$$
$$=(-1)^n(f,(ix)^nF[\varphi])=\frac{1}{i^n}(x^nf,F[\varphi])=\left(\frac{1}{i^n}F[x^nf],\ \varphi\right).$$

Упражнение 15. Найти преобразование Фурье многочлена.

При вычислении преобразования Фурье обобщенных функций иногда бывает удобно выбрать последовательность обычных функций, стремящихся в пространстве S' к заданной функции, найти преобразование Фурье членов этой последовательности, а затем вычислить искомое преобразование Фурье заданной функции с помощью предельного перехода, используя непрерывность преобразования Фурье. Так, например, для того чтобы вычислить преобразование Фурье $F[\theta]$ функции Хевисайда $\theta(x)$, найдем сначала преобразование Фурье функции $\theta(x)e^{-tx}$ $(t>0)$:

$$F[\theta(x)e^{-tx}]=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_0^{+\infty}e^{-x(t+iy)}\,dx=\left.\frac{e^{-x(t+iy)}}{\sqrt{2\pi}(t+iy)}\right|_0^{+\infty}=$$
$$=-\frac{1}{\sqrt{2\pi}(t+iy)}=\frac{i}{\sqrt{2\pi}(y-it)}. \tag{59.32}$$

Покажем теперь, что в S'

$$\lim_{t\to+0}\theta(x)e^{-tx}=\theta(x). \tag{59.33}$$

Действительно, для каждой функции $\varphi\in S$ и любого числа A имеем

$$|(\theta(x),\ \varphi(x))-(\theta(x)e^{-tx},\ \varphi(x))|=\left|\int\limits_0^{+\infty}(1-e^{-tx})\varphi(x)\,dx\right|\leqslant$$
$$\leqslant\left|\int\limits_0^A(1-e^{-tx})\varphi(x)\,dx\right|+\left|\int\limits_A^{+\infty}(1-e^{-tx})\varphi(x)\,dx\right|. \tag{59.34}$$

Зафиксируем функцию $\varphi \in S$ и какое-либо число $\varepsilon > 0$. В силу абсолютной интегрируемости функции φ существует число $A > 0$, такое, что

$$\int_A^{+\infty} |\varphi(x)|\,dx < \frac{\varepsilon}{2},$$

тогда

$$\left|\int_A^{+\infty} (1-e^{-tx})\,\varphi(x)\,dx\right| \leqslant \int_A^{+\infty} |\varphi(x)|\,dx < \frac{\varepsilon}{2}. \qquad (59.35)$$

Выберем теперь $t_0 > 0$ так, чтобы при $0 < t < t_0$ было справедливо неравенство

$$(1-e^{-tA})\int_0^A |\varphi(x)|\,dx < \frac{\varepsilon}{2}$$

и, следовательно,

$$\left|\int_0^A (1-e^{-tx})\,\varphi(x)\,dx\right| < (1-e^{-tA})\int_0^A |\varphi(x)|\,dx < \frac{\varepsilon}{2}. \qquad (59.36)$$

Тогда при $0 < t < t_0$ из (59.34), (59.35) и (59.36) получим

$$|(\theta(x),\ \varphi(x)) - (\theta(x)\,e^{-tx},\ \varphi(x))| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Формула (59.33) доказана.

В силу непрерывности преобразования Фурье

$$\lim_{t\to+0} F[\theta(x)\,e^{-tx}] = F[\theta(x)], \qquad (59.37)$$

отсюда и из (59.33) имеем

$$F[\theta(x)] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \lim_{t\to+0} \frac{i}{y-it},$$

причем из (59.37) следует, что предел, стоящий в правой части, существует (в пространстве S'), он обычно обозначается $\frac{i}{y-i0}$ (см. упражнение 6).

Таким образом,

$$F[\theta(x)] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,\frac{i}{y-i0}.$$

Упражнение 17. Найти преобразование Фурье функций

$$x^k\,\theta(x), \quad k = 1, 2, \ldots .$$

ДОБАВЛЕНИЕ

§ 60. НЕКОТОРЫЕ ВОПРОСЫ ПРИБЛИЖЕННЫХ ВЫЧИСЛЕНИЙ

60.1. Вычисление значений функций

Для вычисления значений функций очень удобно пользоваться формулой или рядом Тейлора. Поясним это на примерах.

1. Вычисление значения синуса. Формула Тейлора для функции $\sin x$ имеет вид

$$\sin x = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \frac{x^{2k-1}}{(2k-1)!} + r_n(x),$$

где

$$r_n(x) = (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \sin^{(2n+1)} \theta x$$

(мы взяли остаточный член в форме Лагранжа). Поэтому

$$|r_n(x)| < \frac{|x|^{2n+1}}{(2n+1)!}. \tag{60.1}$$

Пусть требуется найти $\sin 20°$ с точностью до 10^{-3}. В радианной мере $20°$ соответствует $\frac{\pi}{9}$, поэтому выберем номер n так, чтобы

$$\left| r_n\left(\frac{\pi}{9}\right) \right| < \frac{1}{10^3}; \tag{60.2}$$

тогда значение многочлена Тейлора порядка n в точке $x = \frac{\pi}{9}$ и даст нам искомое приближение $\sin 20°$. В силу неравенства (60.1) для выполнения условия (60.2) достаточно, чтобы выполнялось неравенство

$$\frac{1}{(2n+1)!} \left(\frac{\pi}{9} \right)^{2n+1} < \frac{1}{10^3}. \tag{60.3}$$

При $n = 1$ это неравенство не выполняется:

$$\frac{1}{3!}\left(\frac{\pi}{9}\right)^3 > \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{3^3} = \frac{1}{162} > \frac{1}{10^3},$$

но уже при $n=2$ оно выполняется:

$$\frac{1}{5!}\left(\frac{\pi}{9}\right)^5 < \frac{1}{120}\cdot\frac{1}{2^5} = \frac{1}{3840} < \frac{1}{10^3}.$$

Поэтому $\sin 20°$ с точностью до 10^{-3} находится по формуле

$$\sin 20° \approx \frac{\pi}{9} - \frac{1}{6}\left(\frac{\pi}{9}\right)^3. \tag{60.4}$$

Беря значение π из таблиц с точностью до 10^{-4}, подставляя в формулу (60.4), произведя указанные там действия и округляя результат с точностью до 10^{-3}, получим искомое приближение $\sin 20°$:

$$\sin 20° \approx 0{,}343^{*)}.$$

При вычислении значений синуса можно воспользоваться не формулой, а рядом Тейлора, который для положительного аргумента является знакочередующимся и потому допускает простую оценку остатка: он не превышает по абсолютной величине абсолютной величины своего первого члена (см. п. 35.5). Это дает, естественно, тот же результат, что и выше, так как приводит к оценке (60.3), которую мы получили из других соображений.

2. Вычисление значений натуральных логарифмов.

Ряд Тейлора для логарифма

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{x^n}{n}, \quad -1 < x \leqslant 1, \tag{60.5}$$

может быть непосредственно использован лишь для вычисления логарифмов чисел, не превышающих двух. Однако из ряда (60.5) можно получить другие разложения, позволяющие вычислить логарифмы любых чисел. Заменяя в (60.5) x на $-x$ и вычитая получившийся ряд из (60.5), получим

$$\ln\frac{1+x}{1-x} = 2x\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n}}{2n+1}, \quad |x| < 1. \tag{60.6}$$

---

*) Заметим, что в нашем случае легко устанавливается и более сильное неравенство $r_2\left(\frac{\pi}{9}\right) < \frac{1}{3}10^{-3}$, а при указанном выборе числа знаков π ошибка при вычислении правой части формулы (60.4) во всяком случае не будет превышать $\frac{2}{3}\cdot 10^{-3}$, поэтому суммарная ошибка и будет не больше 10^{-3}.

Когда x изменяется от -1 до 1, то $\frac{1+x}{1-x}$ принимает все положительные значения. Поэтому формула (60.6) может быть использована для вычисления логарифма любых чисел. Естественно возникает вопрос о том, сколько надо взять членов в ряде (60.6), чтобы получить логарифм числа с заданной точностью. Для этого надо оценить остаток ряда (60.6). Имеем

$$|r_n(x)| = 2|x| \sum_{k=n}^{\infty} \frac{x^{2k}}{2k+1} < \frac{2|x|^{2n+1}}{2n+1} \sum_{k=0}^{\infty} x^{2k} = \\ = \frac{2|x|^{2n+1}}{(2n+1)(1-x^2)}, \quad |x|<1. \qquad (60.7)$$

Применим эту оценку для вычисления $\ln 2$ с точностью 10^{-3}. Решая уравнение

$$\frac{1+x}{1-x} = 2,$$

находим $x=\frac{1}{3}$. Полагая в (60.6) $x=\frac{1}{3}$, находим

$$\ln 2 = \frac{2}{3} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)\, 3^{2n}}. \qquad (60.8)$$

Оценка же (60.7) в этом случае дает

$$\left| r_n\left(\frac{1}{3}\right)\right| < \frac{2}{(2n+1)\, 3^{2n+1}} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{9}} = \frac{1}{4(2n+1)3^{2n-1}}.$$

Отсюда при $n=3$ имеем

$$r_3\left(\frac{1}{3}\right) < \frac{1}{4\cdot 7\cdot 3^5} = \frac{1}{28\cdot 243} < \frac{1}{10^3}.$$

Поэтому для вычисления $\ln 2$ с точностью до 10^{-3} достаточно взять первые три члена ряда (60.8):

$$\ln 2 \approx \frac{2}{3}\left(1+\frac{1}{3^3}+\frac{1}{5\cdot 3^4}\right) \approx 0{,}693.$$

60.2. Решение уравнений

Рассмотрим задачу решения уравнения

$$f(x) = 0. \qquad (60.9)$$

Если функция f непрерывна на отрезке $[a, b]$ и принимает на концах отрезка значения разного знака, то метод, которым в п. 6.2 была доказана теорема о существовании в этом случае точки x_0, в которой функция обращается в ноль, дает и приближенный метод вычисления этого значения x_0, т. е. корня уравнения (60.9). Для этого достаточно последовательно делить отрезок $[a, b]$ пополам, выбирая каждый раз тот отрезок, на концах которого функция f принимает значения разного знака (если, конечно, не случится, что в одном из получившихся концов функция f обратится в ноль — в этом случае искомый корень будет уже найден). Если требуется найти корень уравнения (60.9) с точностью до заданного $\varepsilon > 0$, то после n шагов, таких, что

$$\frac{b-a}{2^n} < \varepsilon,$$

концы получившегося отрезка и будут давать искомое приближение некоторого корня уравнения (60.9) (левый — с недостатком, правый — с избытком). Такой способ приближенного решения уравнения (60.9) очень прост и обычно применяется при вычислениях на быстродействующих вычислительных машинах. При проведении же вычислений «вручную» этот способ оказывается очень трудоемким, поэтому в этом случае обычно применяются другие, «более быстро» сходящиеся методы вычисления корней уравнений. Заметим еще, что описанный выше способ имеет и тот недостаток, что он непосредственно не обобщается на случай решений систем уравнений со многими неизвестными.

Мы рассмотрим методы решения уравнения, носящие названия **метода хорд** и **метода касательных**. Последний из них обобщается и на случай систем уравнений.

В дальнейшем будем всегда предполагать, что функция f непрерывна на отрезке $[a, b]$ и имеет на этом отрезке первую и вторую производные*) причем обе они знакопостоянны (в частности, отличны от нуля).

Мы будем предполагать также, что функция f принимает на концах отрезка значения разного знака. В силу знакопостоянства первой производной функция f строго монотонна, поэтому при сделанных предположениях уравнение (60.9) имеет в точности один корень на интервале (a, b).

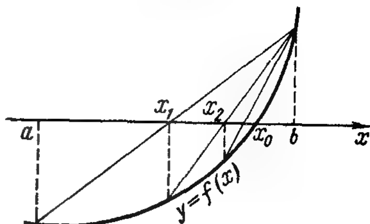


Рис. 179

*) *Для метода хорд достаточно требовать существования первой и второй производных лишь на интервале (a, b). Существование производной в концах отрезка $[a, b]$ будет использоваться только в методе касательных.*

Метод хорд

Этот метод состоит в следующем. График функции f заменяется его хордой, т. е. отрезком, соединяющим концевые точки графика функции f: точки $(a, f(a))$ и $(b, f(b))$. Абсцисса x_1 точки пересечения этой хорды с осью Ox и рассматривается как первое приближение искомого корня (рис. 179). Далее берется тот из отрезков $[a, x_1]$ и $[x_1, b]$, на концах которого функция f принимает значения разного знака (далее будет показано, что при сделанных предположениях $f(x_1) \neq 0$ и, следовательно, такой отрезок всегда существует), и к нему применяется тот же прием; получается второе приближение корня x_2 и т. д. В результате образуется последовательность x_n, $n = 1, 2, \ldots$, которая, как это будет показано, при сделанных ограничениях на функцию f сходится к корню уравнения (60.9).

Легко получить рекуррентные формулы для указанных чисел x_n, $n = 1, 2, \ldots$. Уравнение прямой, проходящей через крайние точки графика функции f, имеет вид

$$y = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) + f(a). \tag{60.10}$$

Обозначим его правую часть через $l(x)$, т. е. запишем уравнение (60.10) в виде

$$y = l(x).$$

Найдем абсциссу x_1 точки пересечения прямой (60.10) с осью Ox, т. е. решим уравнение $l(x) = 0$; получим

$$x_1 = a - \frac{(b-a) f(a)}{f(b) - f(a)}. \tag{60.11}$$

Легко убедиться, что

$$a < x_1 < b \tag{60.12}$$

(это, например, следует из строгой монотонности и непрерывности функции $l(x)$ и того, что на концах отрезка $[a, b]$ она принимает значения разного знака: $l(a) = f(a)$ и $l(b) = f(b)$).

Аналогично находим

$$x_{n+1} = x_n - \frac{(b - x_n) f(x_n)}{f(b) - f(a)}, \quad n = 1, 2, \ldots. \tag{60.13}$$

Мы покажем, что последовательность $\{x_n\}$ стремится к корню уравнения (60.9) монотонно.

Предположим для определенности, что $f'(x) > 0$, $f''(x) > 0$,

$a < x < b$ (см. рис. 179). В этом случае функция f строго монотонно возрастает и строго выпукла вниз. Следовательно, любая внутренняя точка хорды, соединяющей крайние точки графика функции f, лежит над соответствующей точкой графика функции f, т. е.

$$l(x) > f(x), \quad a < x < b.$$

В частности, если x_0 — корень уравнения (60.9): $f(x_0) = 0$, то отсюда следует, что

$$l(x_0) > 0.$$

Мы имеем (см. (60.11) и (60.12)):

$$l(x_1) = 0, \quad a < x_1 < b.$$

Таким образом,

$$l(x_1) < l(x_0), \tag{60.14}$$

но линейная функция $l(x)$ строго монотонно возрастает, ибо

$$l(b) = f(b) > f(a) = l(a),$$

поэтому из (60.14) следует

$$x_1 < x_0.$$

Заменяя теперь отрезок $[a, b]$ отрезком $[x_1, b]$ и замечая, что $f(x_1) < 0$, аналогично докажем, что

$$x_1 < x_2 < x_0.$$

Далее по индукции получим

$$x_1 < x_2 < \ldots < x_n < \ldots < x_0.$$

Таким образом, последовательность $\{x_n\}$, будучи монотонной и ограниченной, сходится. Пусть $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = c$. Переходя к пределу при $n \to \infty$ в равенстве (60.13), получим $f(c) = 0$, т. е. последовательность $\{x_n\}$ сходится к корню уравнения (60.9).

Если $|f'(x)| \geqslant m > 0$, $a < x < b$, то нетрудно получить оценку скорости сходимости последовательности $\{x_n\}$ через значения самой функции f в точках x_n. Действительно,

$$f(x_n) = f(x_n) - f(x_0) = f'(\xi_n)(x_n - x_0),$$

$$x_n < \xi_n < x_0, \quad n = 1, 2, \ldots .$$

Отсюда

$$|x_n - x_0| \leqslant \frac{|f(x_n)|}{m}, \quad n = 1, 2, \ldots .$$

Остальные случаи, т. е. случаи

$$f'(x) > 0, \quad f''(x) < 0,$$

$$f'(x) < 0,\ f''(x) > 0,$$
$$f'(x) < 0,\ f''(x) < 0,$$

рассматриваются аналогично разобранному (рис. 180).

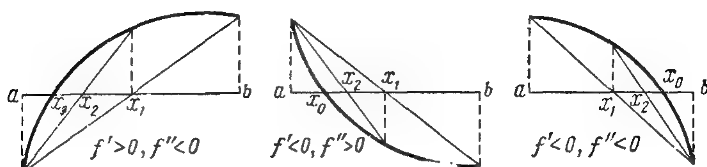


Рис. 180

Метод касательных

Будем предполагать, что функция f удовлетворяет тем же условиям, что и при рассмотрении метода хорд. Проведем касательную к графику функции f в одной из его концевых точек, например, в точке $(b, f(b))$. Абсцисса x_1 точки ее пересечения с осью Ox и считается первым приближением корня уравнения (60.9). Далее, если $x_1 \in (a, b)$ (а это всегда имеет место для одной из касательных в концевых точках графика см. ниже), то из двух отрезков $[a, x_1]$ и $[x_1, b]$ выбирается тот, на концах которого функция f принимает значения разного знака (далее будет показано, что $f(x_1) \neq 0$). Затем проводится касательная к графику функции f в точке $(x_1, f(x_1))$; точка ее пересечения с осью Ox обозначается x_2 и т. д. (рис. 181).

Легко получаются рекуррентные формулы для указанных чисел x_n, $n = 1, 2, \ldots$. Уравнение касательной, проходящей через точку $(b, f(b))$, имеет вид

$$y = f'(b)(x - b) + f(b).$$

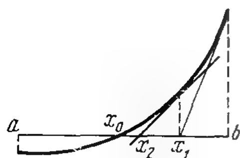


Рис. 181

Обозначим его правую часть через $L(x)$, т. е. запишем это уравнение в виде

$$y = L(x).$$

Найдем абсциссу x_1 точки пересечения этой касательной с осью Ox, т. е. решим уравнение $L(x) = 0$. Получим

$$x_1 = b - \frac{f(b)}{f'(b)}.$$

Точка x_1 может лежать, вообще говоря, вне отрезка $[a, b]$, т. е. вне области определения функции f. Однако если $f(b)$ одного знака с f'', то $x_1 \in (a, b)$. Рассмотрим подробно, как и для метода хорд, случай, когда $f' > 0$, $f'' > 0$ на $[a, b]$. В этом случае функция f строго мо-

нотонно возрастает, следовательно, $f(b) > 0$; кроме того, функция f выпукла вниз на (a, b), следовательно,

$$L(x) < f(x)$$

(см. п. 14.3, а также п. 37.4).

Если $f(x_0) = 0$, $a < x_0 < b$, то

$$L(x_0) < 0,$$

но $L(b) = f(b) > 0$, следовательно,

$$x_0 < x_1 < b.$$

При этом $f(x_1) > L(x_1) = 0$.

Применяя те же рассуждения к отрезку $[a, x_1]$, получим точку x_2, такую, что

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}, \quad x_0 < x_2 < x_1,$$

и, далее,

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \quad x_0 < x_{n+1} < x_n. \qquad (60.15)$$

Следовательно, последовательность $\{x_n\}$ монотонна и ограничена, а потому сходится. Пусть $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = c$. Переходя к пределу в (60.15), получим $f(c) = 0$, т. е. последовательность (60.15) сходится к корню уравнения (60.9).

Когда $|f'(x)| \geqslant m > 0$, $a < x < b$, то тем же способом, что и в случае метода хорд, получаем оценку

$$|x_n - x_0| \leqslant \frac{|f(x_n)|}{m}, \quad n = 1, 2, \ldots .$$

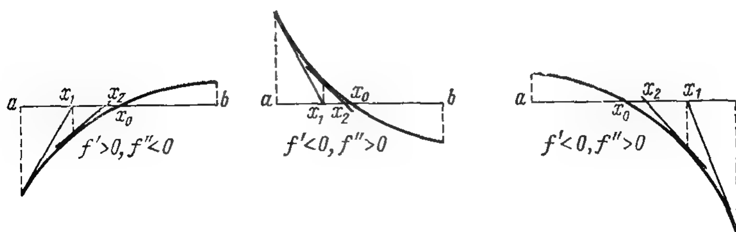


Рис. 182

Подобным же образом разбираются и оставшиеся случаи различных комбинаций знаков первой и второй производных (рис. 182).

60.3. Интерполяция функций

Пусть на отрезке $[a, b]$ задана функция f и пусть фиксированы $n+1$ значение аргумента x_i, $i = 1, 2, \ldots, n+1$:

$$a \leqslant x_1 < x_2 < \ldots < x_{n+1} \leqslant b. \qquad (60.16)$$

Одна из простейших интерполяционных задач состоит в отыскании многочлена $P(x)$ не выше некоторой данной степени m, который при значениях аргумента $x = x_i$, $i = 1, 2, \ldots, n+1$, называемых *узлами интерполяции*, принимает те же значения, что и данная функция, т. е. имеют место равенства

$$f(x_i) = P(x_i), \quad i = 1, 2, \ldots, n+1. \qquad (60.17)$$

Такой многочлен $P(x)$ называется *интерполяционным многочленом*, интерполирующим функцию f в данных узлах интерполяции.

Для того чтобы исследовать вопрос о существовании интерполяционного многочлена $P(x)$, удовлетворяющего условиям (60.17), запишем его с неопределенными коэффициентами a_j, $j = 0, 1, \ldots, m$:

$$P(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_m x^m$$

и подставим его в систему (60.17). Получим систему из $(n+1)$-го линейного уравнения с $m+1$ неизвестными $a_0, a_1, \ldots, a_m$:

$$\begin{array}{c} a_0 + a_1 x_1 + \ldots + a_m x_1^m = f(x_1) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_0 + a_1 x_{n+1} + \ldots + a_m x_{n+1}^m = f(x_{n+1}). \end{array} \qquad (60.18)$$

Определитель, составленный из коэффициентов этой системы, стоящих в первых k строчках и первых k столбцах, $k \leqslant \min\{m+1, n+1\}$ (число строчек равно $n+1$, число столбцов $m+1$), является так называемым **определителем Вандермонда**, известным из курса алгебры:

$$W(x_1, \ldots, x_n) = \begin{vmatrix} 1 & x_1 \ldots x_1^k \\ 1 & x_2 \ldots x_2^k \\ \cdot & \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ 1 & x_k \ldots x_k^k \end{vmatrix} = \prod_{1 \leqslant i < j \leqslant k} (x_j - x_i).$$

В данном случае этот определитель не равен нулю, ибо все узлы интерполяции различны. Поэтому ранг матрицы коэффициентов системы (60.18) равен наименьшему из двух чисел $m+1$ и $n+1$. Если $n > m$, то система (60.18), вообще говоря, не имеет решения.

Если $n \leqslant m$, то решение системы (60.18) всегда существует, причем в случае $n = m$ решение единственно, а при $n < m$ решений бесконечно много. Таким образом, *какие бы ни задать значения в* $(n+1)$*-м узле* (60.16), *всегда существует и притом единственный многочлен степени не выше чем* n, *принимающий в этих узлах заданные значения.*

Для отыскания интерполяционного многочлена $P(x)$ можно решить систему (60.18). Однако можно найти его и другим, более коротким путем.

Рассмотрим многочлен

$$P_i(x) = \frac{(x-x_1)\dots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\dots(x-x_{n+1})}{(x_i-x_1)\dots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\dots(x_i-x_{n+1})},$$

$$i = 1,\ 2, \dots,\ n+1.$$

Очевидно, что $P_i(x)$ — многочлен степени n и что

$$P_i(x_i) = 1,\ P_i(x_j) = 0,$$

$$i = 1,\ 2, \dots,\ n+1,\ j = 1,\ 2, \dots,\ i-1,\ i+1, \dots,\ n. \qquad (60.19)$$

Поэтому искомый интерполяционный многочлен может быть записан в виде

$$P(x) = \sum_{i=1}^{n+1} f(x_i) P_i(x). \qquad (60.20)$$

Действительно, написанное выражение является многочленом степени не выше n и в силу (60.19) удовлетворяет условиям (60.17). Интерполяционный многочлен, записанный в виде (60.20), называется *интерполяционным многочленом Лагранжа.*

Исследуем теперь разность между функцией и интерполяционным многочленом:

$$R(x) = f(x) - P(x),$$

называемую *остаточным членом интерполяции.*

Предположим, что функция f $n+1$ раз дифференцируема на отрезке $[a, b]$. Тогда этим же свойством обладает и остаток $R(x)$, причем

$$R^{(n+1)}(x) = f^{(n+1)}(x),\ a \leqslant x \leqslant b, \qquad (60.21)$$

ибо $P^{(n+1)}(x) \equiv 0$. Положим

$$\omega(x) = (x-x_1)(x-x_2)\dots(x-x_{n+1}),$$

зафиксируем $x \in [a, b]$ и рассмотрим вспомогательную функцию

$$\varphi(t) = R(t) - \frac{R(x)}{\omega(x)}\omega(t),\ a \leqslant t \leqslant b.$$

Функция $\varphi(t)$, очевидно, также $n+1$ раз дифференцируема на отрезке $[a, b]$, причем из (60.21) и того, что $\omega^{(n+1)}(t)=(n+1)!$, имеем

$$\varphi^{(n+1)}(t)=f^{(n+1)}(t)-(n+1)!\,\frac{R(x)}{\omega(x)}. \qquad (60.22)$$

Далее, функция $\varphi(t)$ обращается в ноль в $n+2$ точках x, x_1, x_2, ..., x_{n+1}; поэтому в силу теоремы Ролля ее производная обращается в ноль по крайней мере в $n+1$ точке отрезка $[a, b]$, и вторая производная — в n точках и т. д. По индукции получим, что $n+1$ производная функция φ обращается по крайней мере один раз в ноль внутри отрезка $[a, b]$.

Пусть $\varphi^{(n+1)}(\zeta)=0$, $a<\zeta<b$, тогда из (60.22) получим

$$R(x)=\frac{\omega(x)}{(n+1)!}\,f^{(n+1)}(\zeta),$$

или, подробнее,

$$R(x)=\frac{(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_{n+1})}{(n+1)!}\,f^{(n+1)}(\zeta),$$

$$a\leqslant x\leqslant b,\ a<\zeta<b.$$

Отсюда следует оценка остаточного члена

$$|R(x)|\leqslant\frac{1}{(n+1)!}\max_{a\leqslant x\leqslant b}|(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_n)|\sup_{a\leqslant x\leqslant b}|f^{(n+1)}(x)|.$$

Заметим, что, вообще говоря, даже для аналитических на отрезке $[a, b]$ функций остаточный член интерполяции не стремится к нулю на отрезке $[a, b]$ при $n\to\infty$, т. е. интерполяционные полиномы не сходятся к самой функции. Построение соответствующих примеров достаточно громоздко, поэтому мы не будем на этом останавливаться.

60.4. Квадратурные формулы

Рассмотрим теперь некоторые способы приближенного интегрирования функций. Формулы для приближенных значений интегралов называются *квадратурными формулами*.

Пусть на отрезке $[a, b]$ задана функция f. Разобьем отрезок $[a, b]$ на n равных частей точками x_k, $k=1, 2, \ldots, n-1$:

$$a=x_0<x_1<\ldots<x_{n-1}<x_n=b;\ x_k-x_{k-1}=\frac{b-a}{n},$$

$$k=1, 2, \ldots, n.$$

Квадратурные формулы, которые мы рассмотрим, будут получаться посредством замены при интегрировании функции f на каж-

дом отрезке $[x_{k-1}, x_k]$ интерполяционным многочленом степени n. Мы изучим случаи $n = 0, 1, 2$. Соответствующие приближенные значения интеграла от функции f будем обозначать символом $L_n(f)$, $n = 0, 1, 2$. В первом случае (при $n = 0$) соответствующая квадратурная формула называется *формулой прямоугольников*, во втором (при $n = 1$) — *формулой трапеций*, в третьем (при $n = 2$) — *параболической формулой* или, чаще, *формулой Симпсона*.

Формула прямоугольников

Для интерполяции функции f на отрезке $[x_{k-1}, x_k]$, $k = 1, 2, \ldots, n$, многочленом нулевой степени достаточно задать лишь один узел. Возьмем в качестве узла середину отрезка $[x_{k-1}, x_k]$:

$$\xi_k = \frac{x_{k-1} + x_k}{2}.$$

Интерполяционным многочленом является постоянная

$$P_k(x) = f(\xi_k), \quad k = 1, 2, \ldots, n.$$

При такой интерполяции мы заменяем данную функцию f «ступенчатой функцией», точнее набором функций, постоянных на каждом отрезке $[x_{k-1}, x_k]$ и равных значению функции в цент-

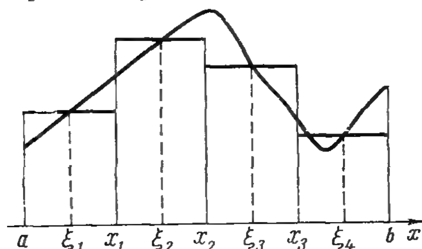


Рис. 183

ре этого отрезка (рис. 183). Вместо интеграла $\int\limits_{x_{k-1}}^{x_k} f(x)\,dx$ возьмем интеграл $\int\limits_{x_{k-1}}^{x_k} P_k(x)\,dx$, т. е заменим площадь криволинейной трапеции площадью соответствующего прямоугольника.

Напишем теперь квадратурную формулу прямоугольников:

$$L_0[f]=\sum_{k=1}^{n}\int_{x_{k-1}}^{x_k} P_k(x)\,dx=\sum_{k=1}^{n}\int_{x_{k-1}}^{x_k} f(\xi_k)\,dx=$$

$$=\frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k). \qquad (60.23)$$

Итак,

$$L_0[f]=\frac{b-a}{n}\left[f\left(\frac{a+x_1}{2}\right)+f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)+\ldots+f\left(\frac{x_{n-1}+b}{2}\right)\right].$$

Формула трапеций

На каждом отрезке $[x_{k-1}, x_k]$, $k=1, 2, \ldots, n$, возьмем интерполяционный многочлен $P_k(x)$ первой степени, определяемый узлами интерполяции x_{k-1} и x_k. Полагая $y_i=f(x_i)$, $i=0, 1, \ldots, n$, получим (см. (60.20))

$$P_k(x)=\frac{x-x_k}{x_{k-1}-x_k}\,y_{k-1}+\frac{x-x_{k-1}}{x_k-x_{k-1}}\,y_k,\quad k=1, 2, \ldots, n.$$

Таким образом, мы заменяем данную функцию f кусочно-линейной функцией. Вместо интеграла $\int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x)\,dx$ возьмем интеграл $\int_{x_{k-1}}^{x_k} P_k(x)\,dx$, т. е. заменим площадь криволинейной трапеции соответствующей площадью обыкновенной трапеции (рис. 184).

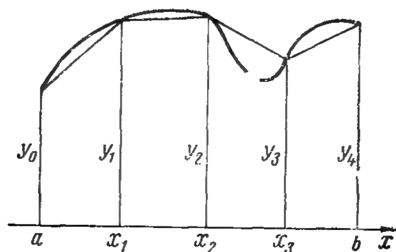


Рис. 184

Замечая, что

$$\int\limits_{x_{k-1}}^{x_k} P_k(x)\,dx = \frac{y_{k-1}+y_k}{2}\;\frac{b-a}{n},\quad k=1,\ 2,\ \dots,\ n,$$

получим квадратурную формулу трапеций

$$L_1[f] = \sum_{k=1}^{n}\int\limits_{x_{k-1}}^{x_k} P_k(x)\,dx = \frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{y_{k-1}+y_k}{2}, \qquad (60.24$$

или

$$L_1[f] = \frac{b-a}{n}\left[\frac{f(a)+f(b)}{2} + f(x_1) + f(x_2) + \dots + f(x_n)\right].$$

Формула Симпсона

На каждом отрезке $[x_{k-1},\ x_k]$, $k=1,\ 2,\ \dots,\ n$, возьмем интерполяционный многочлен $P_k(x)$ второй степени, определяемый узлами интерполяции x_{k-1}, $\xi_k = \frac{x_{k-1}+x_k}{2}$ и x_k. Тогда

$$P_k(x) = \frac{(x-\xi_k)(x-x_k)}{(x_{k-1}-\xi_k)(x_{k-1}-x_k)} f(x_{k-1}) +$$

$$+ \frac{(x-x_{k-1})(x-x_k)}{(\xi_k-x_{k-1})(\xi_k-x_k)} f(\xi_k) + \frac{(x-x_{k-1})(x-\xi_k)}{(x_k-x_{k-1})(x_k-\xi_k)} f(x_k).$$

Непосредственным вычислением убеждаемся, что

$$\int\limits_{x_{k-1}}^{x_k} \frac{(x-\xi_k)(x-x_k)}{(x_{k-1}-\xi_k)(x_{k-1}-x_k)}\,dx = \frac{1}{6}(x_k - x_{k-1}) = \frac{1}{6}\,\frac{b-a}{n},$$

$$\int\limits_{x_{k-1}}^{x_k} \frac{(x-x_{k-1})(x-x_k)}{(\xi_k-x_{k-1})(\xi_k-x_k)}\,dx = \frac{2}{3}(x_k - x_{k-1}) = \frac{2}{3}\,\frac{b-a}{n},$$

$$\int\limits_{x_{k-1}}^{x_k} \frac{(x-x_{k-1})(x-\xi_k)}{(x_k-x_{k-1})(x_k-\xi_k)}\,dx = \frac{1}{6}(x_k - x_{k-1}) = \frac{1}{6}\,\frac{b-a}{n},$$

поэтому

$$\int\limits_{x_{k-1}}^{x_k} P_k(x)\,dx = \frac{b-a}{n}\left[\frac{1}{6} f(x_{k-1}) + \frac{2}{3} f(\xi_k) + \frac{1}{6} f(x_k)\right].$$

Теперь нетрудно написать квадратурную формулу Симпсона:

$$L_2[f]=\sum_{k=1}^{n}\int_{x_{k-1}}^{x_k} P_k(x)\,dx=\frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n}\left[\frac{1}{6}f(x_{k-1})+\frac{2}{3}f(\xi_k)+\frac{1}{6}f(x_k)\right], \tag{60.25}$$

или

$$L_2[f]=$$
$$=\frac{b-a}{6n}\{f(a)+f(b)+2[f(x_1)+\ldots+f(x_{n-1})]+4[f(\xi_1)+\ldots+f(\xi_n)]\}.$$

60.5. Погрешность квадратурных формул

Мы видели, что во всех трех рассмотренных нами случаях квадратурные формулы (см. (60.23), (60.24), (60.25)) имеют вид

$$L(f)=\sum_{k=1}^{n} l_k(f), \tag{60.26}$$

где

$$l_k(f)=\frac{b-a}{n}\sum_{i=0}^{m} p_i f(\xi_{ki}), \tag{60.27}$$

$$x_{k-1}\leqslant\xi_{ki}\leqslant x_k,\ \ k=1,\ 2,\ \ldots,\ n.$$

В случае формулы прямоугольников мы имели

$$m=0,\ \ p_0=1,\ \ \xi_{k0}=\frac{x_{k-1}+x_k}{2};$$

в случае формулы трапеций

$$m=1,\ \ p_0=p_1=\frac{1}{2},\ \ \xi_{k0}=x_{k-1},\ \ \xi_{k1}=x_k;$$

в случае формулы Симпсона

$$m=2,\ \ p_0=p_2=\frac{1}{6},\quad p_1=\frac{2}{3},\ \ \xi_{k0}=x_{k-1},\ \ \xi_{k1}=\frac{x_{k-1}+x_k}{2},\ \ \xi_{k2}=x_k,$$
$$k=1,\ 2,\ \ldots,\ n.$$

Пусть теперь заданы какие-либо числа p_i, называемые *весами*, и пусть на отрезке $[0;\ 1]$ задана какая-либо система точек ξ_i, $i=0,\ 1,\ \ldots,\ m$, называемых *узлами*. Пусть, как и раньше, отрезок $[a,\ b]$ разделен точками x_k, $k=0,\ 1,\ \ldots,\ n$, на n равных отрезков $[x_{k-1},\ x_k]$, $k=1,\ 2,\ \ldots,\ n$, и пусть точки ξ_{ki} получаются из узлов ξ_i при линейном отображении отрезка $[0;\ 1]$ на отрезок $[x_{k-1},\ x_k]$, при котором точка ноль переходит в точку x_{k-1}, т. е. при отображении $x=(x_k-x_{k-1})\,t+x_{k-1}$, $\quad 0\leqslant t\leqslant 1$.

Формула (60.26) в этом случае называется квадратурной формулой, соответствующей узлам ξ_i, и весам p_i, $i=0, 1, \ldots, m$.

Всякая квадратурная формула (60.26) обладает свойством линейности: для любых двух функций f и g, определенных на отрезке $[a, b]$, и для любых двух чисел λ и μ, очевидно, справедливо равенство

$$L(\lambda f+\mu g)=\lambda L(f)+\mu L(g).$$

Определение. *Формула* $L(f)=\sum_{k=1}^{n} l_k(f)$ *называется точной для многочленов степени r, если для любого многочлена $P(x)$ степени не выше чем r, для любого отрезка $[a, b]$ и для любого числа n (т. е. для любого разбиения отрезка $[a, b]$ на равные отрезки) справедливо равенство*

$$L(P(x))=\int_a^b P(x)\,dx.$$

Упражнение. Доказать, что, для того чтобы квадратурная формула $L[f]$, соответствующая узлам ξ_i и весам p_i, $i=0, 1, \ldots, m$, была точна для многочленов степени r, необходимо и достаточно, чтобы для любого многочлена $P(x)$ степени не выше r было справедливо равенство

$$\int_0^1 P(x)\,dx=\sum_{i=0}^{m} p_i P(\xi_i).$$

Поскольку интерполяционный многочлен порядка r совпадает для многочлена степени r с самим многочленом, то квадратурные формулы прямоугольников, трапеций и Симпсона точны соответственно для многочленов нулевой, первой и второй степени.

Однако, более того, квадратурная формула прямоугольников точна для многочленов первой степени, а формула Симпсона — для многочленов третьей степени. Докажем это.

Действительно, в случае формулы прямоугольников (см. (60.23) и (60.27))

$$l_k(f)=f\left(\frac{x_{k-1}+x_k}{2}\right)(x_k-x_{k-1}).$$

Простой подсчет дает, что для любой линейной функции справедливо равенство

$$l_k(Ax+B)=\int_{x_{k-1}}^{x_k}(Ax+B)\,dx. \qquad (60.28)$$

Это наглядно видно и на рис. 185. Суммируя равенства (60.28) по k от 1 до n, получим

$$L_1(Ax+B)=\int_a^b (Ax+B)\,dx,$$

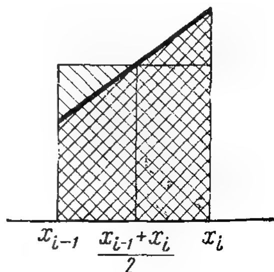


Рис. 185

что и означает точность квадратурной формулы прямоугольников для многочленов первой степени.

В случае формулы Симпсона (см. (60.25) и (60.27))

$$l_k(f) = \frac{b-a}{n}\left[\frac{1}{6}f(x_{k-1}) + \frac{2}{3}f\left(\frac{x_{k-1}+x_k}{2}\right) + \frac{1}{6}f(x_k)\right]. \qquad (60.29)$$

Достаточно показать, что для любого многочлена третьей степени $P(x)$ в этом случае

$$l_k(P(x)) = \int\limits_{x_{k-1}}^{x_k} P(x)\,dx, \quad k = 1,\ 2, \dots,\ n. \qquad (60.30)$$

В самом деле, если это равенство будет доказано, то, суммируя по k от 1 до n эти равенства, получим

$$L_2(P(x)) = \int\limits_a^b P(x)\,dx,$$

т. е. получим, что формула Симпсона точна для многочленов третьей степени.

Пусть $P(x) = Ax^3 + Bx^2 + Cx + D$. Положим $Q(x) = Bx^2 + Cx + D$, тогда $P(x) = Ax^3 + Q(x)$. Поэтому

$$l_k(P(x)) = Al_k(x^3) + l_k(Q(x)),$$

$$\int\limits_{x_{k-1}}^{x_k} P(x)\,dx = A\int\limits_{x_{k-1}}^{x_k} x^3\,dx + \int\limits_{x_{k-1}}^{x_k} Q(x)\,dx, \quad k = 1,\ 2, \dots,\ n. \qquad (60.31)$$

В силу того, что формула Симпсона точна для многочленов второй степени, имеем

$$l_k(Q(x)) = \int\limits_{x_{k-1}}^{x_k} Q(x)\,dx, \quad k = 1,\ 2, \dots,\ n.$$

С другой стороны, непосредственным вычислением убеждаемся, что

$$\int\limits_{x_{k-1}}^{x_k} x^3\,dx = \frac{x_k^4 - x_{k-1}^4}{4},$$

$$l_k(x^3) = (x_k - x_{k-1})\left[\frac{x_{k-1}^3}{6} + \frac{2}{3}\left(\frac{x_{k-1}+x_k}{2}\right)^3 + \frac{x_k^3}{6}\right] = \frac{x_k^4 - x_{k-1}^4}{4}.$$

Это и доказывает равенство (60.30).

Порядок погрешности квадратурных формул оказывается связан со степенью многочленов, относительно которых точна рассматриваемая квадратурная формула.

Теорема 1. *Пусть функция f r раз непрерывно дифференцируема на отрезке $[a, b]$ и пусть число $M > 0$ таково, что*

$$|f^{(r)}(x)| \leqslant M, \quad a \leqslant x \leqslant b.$$

Если квадратурная формула (60.26) *точна для многочленов степени $r-1$ ($r = 1, 2, \ldots$), то существует постоянная $c_r > 0$, не зависящая от функции f, такая, что*

$$\left| \int_a^b f(x)\,dx - L(f) \right| \leqslant \frac{c_r M (b-a)^{r+1}}{n^r}. \tag{60.32}$$

Доказательство. Представим функцию f на каждом отрезке $[x_{k-1}, x_k]$, согласно формуле Тейлора, в виде

$$f(x) = P_k(x) + r_k(x), \quad k = 1, 2, \ldots, n,$$

где

$$P_k(x) = \sum_{j=0}^{r-1} \frac{f^{(j)}(x_{k-1})}{j!} (x - x_{k-1})^j$$

— многочлен Тейлора степени $r-1$, и, следовательно, $r_k(x)$ — остаточный член формулы Тейлора, который мы запишем в форме Лагранжа:

$$r_k(x) = \frac{f^{(r)}[x_{k-1} + \theta_k (x - x_{k-1})]}{r!} (x - x_{k-1})^r, \tag{60.33}$$
$$0 < \theta_k < 1, \quad k = 1, 2, \ldots, n.$$

Тогда

$$\int_a^b f(x)\,dx - L(f) = \sum_{k=1}^{n} \int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x)\,dx - \sum_{k=1}^{n} l_k(f) =$$
$$= \sum_{k=1}^{n} \left[\int_{x_{k-1}}^{x_k} P_k(x)\,dx - l_k(P_k(x)) \right] +$$
$$+ \sum_{k=1}^{n} \left[\int_{x_{k-1}}^{x_k} r_k(x)\,dx - l_k(r_k(x)) \right]. \tag{60.34}$$

В силу того, что данная квадратурная формула точна для многочленов степени r, справедливо равенство

$$\int_{x_{k-1}}^{x_k} P_k(x)\,dx - l_k\left(P_k(x)\right) = 0,\ k = 1,\ 2, \dots,\ n^{*)}.$$

Поэтому из (60.34) следует, что

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx - L(f)\right| \leqslant$$
$$\leqslant \sum_{k=1}^{n} \int_{x_{k-1}}^{x_k} |r_k(x)|\,dx + \sum_{k=1}^{n} \left|l_k\left(r_k(x)\right)\right|. \qquad (60.35)$$

Далее, из (60.33) имеем

$$|r_k(x)| \leqslant \frac{M}{r!}\left(\frac{b-a}{n}\right)^r,\ k = 1,\ 2, \dots,\ n.$$

Применяя это неравенство, получим

$$\int_{x_{k-1}}^{x_k} |r_k(x)|\,dx \leqslant \frac{M(b-a)^r}{r!\,n^r} \int_{x_{k-1}}^{x_k} dx = \frac{M(b-a)^{r+1}}{r!\,n^{r+1}}.$$

Полагая $p = \max_{i=0,\ 1,\ \dots,\ m} |p_i|$ [см. (60.27)], имеем

$$\left|l_k\left(r_k(x)\right)\right| \leqslant \frac{b-a}{n} \sum_{i=0}^{m} |p_i|\,|r_k(\xi_{ki})| \leqslant \frac{(b-a)^{r+1}\,pM(m+1)}{r!\,n^{r+1}}.$$

Подставляя эти оценки в (60.35) и введя обозначение

$$c_r = \frac{1 + p(m+1)}{r!},$$

мы и получим неравенство (60.32).

Теорема доказана.

Из формулы (60.32) следует, в частности, что при вычислении интегралов с помощью квадратурных формул прямоугольников и трапеций (они, как мы знаем, точны для многочленов первого порядка, и потому для них можно взять $r=2$) ошибка имеет порядок $O\left(\frac{1}{n^2}\right)$, а при вычислении интегралов с помощью формулы Симпсона (она точна уже для многочленов третьего порядка и можно взять $r = 4$) ошибка составляет уже всего лишь величину $O\left(\frac{1}{n^4}\right)$.

---

* Действительно, это следует из определения точности квадратурной формулы относительно многочленов данной степени на стр. 405, если в этом определении в качестве отрезка $[a, b]$ взять отрезок $[x_{k-1}, x_k]$ и положить $n=1$.

Отметим, что при приведенном подсчете постоянных c_r мы не получили для них минимальных значений. Это о можно достичь, усовершенствовав методы их подсчета.

Задача 32. *Доказать*, что для формулы прямоугольников можно взять $c_2 = \frac{1}{24}$, для формулы трапеций $c_2 = \frac{1}{12}$, а для формулы Симпсона $c_4 = \frac{1}{2880}$.